

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Laurea in FISICA

CALCOLO 2

Prof. P. Cannarsa

Sessione Estiva

Edificio Scienze – Aula G2C – 07/09/2016 – h 09:30

Esercizio 1. Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - x(t) \\ \dot{y}(t) = \alpha \sin x(t) - y(t) \end{cases} \quad |\alpha| \leq 1 \quad (1)$$

- (a) Determinare gli eventuali punti di equilibrio al variare di α .
- (b) Per $\alpha = 0$ risolvere esplicitamente (1) e studiarne i punti di equilibrio.
- (c) Analizzare gli eventuali punti di equilibrio per $\alpha = 1$.
Suggerimento: Ricordando che $|\sin x| \leq |x|$ dimostrare che $V(x, y) = x^2 + y^2$ è una funzione di Liapunov.

Esercizio 2. Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2, x, y^2 - 2xz) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

lungo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$, sul piano $z = 0$, percorsa in verso antiorario, sia direttamente, sia applicando il teorema di Stokes.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x) = x \sin x, \quad x \in [-\pi, \pi),$$

- a) se ne calcolino i coefficienti di Fourier e si studi la convergenza della relativa serie;
- b) si calcoli la somma delle serie numeriche

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - 1} \quad \text{e} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$$

Esercizio 4. Sia dato l'integrale improprio dipendente da un parametro

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} e^{-i\alpha\omega} d\omega, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si usino le proprietà della trasformata di Fourier per determinarne il valore al variare di α .