UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in FISICA

$\mathbb{CALCOLO}$ 2

Prof. P. Cannarsa

Sessione Estiva Anticipata – II appello
Edificio Scienze – Aula 1 – 22/02/2016 – h 09:30

Esercizio 1. Sia dato il seguente sistema d'equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = -x\left(x^2 + y^2 + 1\right), \\ \dot{y} = y\left(x^2 - 1\right). \end{cases}$$

1) Determinare il punto stazionario del sistema.
2) Studiare la stabilità del punto stazionario utilizzando sia il metodo di linearizzazione che il metodo di Lyapunov.
3) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy con condizioni iniziali
$$(x(0), y(0)) = (a, 0).$$

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$\mathrm{V}(x, y, z) = \left(xy,\, \cos z - \frac{y^2}{2},\, x^2 + y^2\right),$$

determinarne il flusso attraverso la porzione di superficie

$$\varSigma = \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \middle|\; x^2 + y^2 = z \leq 4\right\}.$$

Esercizio 3. Dato un numero reale $p \geqslant 0$, si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ definita da

$$f_n(x) = n^p x e^{-nx} \qquad (x \geq 0)$$

1) Calcolare il limite puntuale $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
2) Dimostrare che la convergenza è uniforme se $0 \leqslant p < 1$.
3) Utilizzando il teorema di Lebesgue provare che, se $0 \leqslant p < 2$, si ha
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0.$$
Suggerimento: osservare che $t^p e^{-t} \leqslant (p/e)^p$ per ogni $t \geqslant 0$.
4) Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$$
per $p \geqslant 2$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile tale che

$$\mathscr{F}[f](\omega) = \frac{\omega}{(1+\omega^2)^2}.$$

1) Giustificare il fatto che f è una funzione dispari a valori immaginari puri.

2) Determinare $f(x)$.

3) Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^4} d\omega.$$