

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Laurea in FISICA

CALCOLO 2

Prof. P. Cannarsa

II Esonero

Edificio Scienze, 13 gennaio 2016, h 11:00, Aula 22

Esercizio 1.

- (a) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni

$$f(x) = \pi - |x|, \quad g(x) = x^2$$

con $x \in [-\pi, \pi]$.

- (b) Dimostrare la relazione

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx = \frac{a_0^f a_0^g}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^f a_k^g + b_k^f b_k^g),$$

avendo indicato con $\{a_k^f, b_k^f\}$ e $\{a_k^g, b_k^g\}$ i coefficienti di Fourier delle rispettive funzioni. Qui le funzioni f e g sono continue, periodiche di periodo 2π e regolari a tratti.

- (c) Applicare la relazione del punto precedente alle funzioni f e g del punto (a) per verificare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

(d) Posto

$$S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^4}, \quad R_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)^4}$$

e osservato che

$$S_{2N} = R_N + \frac{1}{16}S_N,$$

calcolare

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Esercizio 2.

Determinare tutte le funzioni $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ che risolvono l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y) \exp(-|y|) dy = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (t \in \mathbb{R}).$$