

# UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in FISICA

CALCOLO 2

Prof. P. Cannarsa

I esonero

27 novembre 2015

Esercizio 1 :

(a) Si consideri l'equazione

$$mx'' + k(x + x^3) = 0$$

(moto di una particella di massa  $m$  attaccata ad una molla di elasticità  $k(x + x^3)$ ,  $k > 0$ ); si dimostri che la soluzione nulla è di equilibrio stabile. Suggerimento: Una funzione candidata di Liapunov è l'energia meccanica del sistema

(b) Si consideri l'equazione

$$mx'' + k(x + x^3) + hx' = 0 \quad h > 0, k > 0$$

si dimostri che la soluzione nulla è di equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 2 : Data l'equazione differenziale

$$y' = (x^2 - x)f(y),$$

con

$$f(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y^\alpha(1 + y^2)^{-1/2} & y > 0, \alpha > 1 \end{cases}$$

e la condizione iniziale  $y(x_0) = y_0$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ;

(a) si studino, al variare di  $\alpha$  e di  $y_0$ , esistenza ed unicità di una soluzione del problema.

(b) Per  $\alpha = 2$ , dopo aver verificato che ogni soluzione è prolungabile in  $\mathbb{R}$ , si tracci un grafico qualitativo delle linee integrali.

Esercizio 3 :Si calcoli il flusso del campo

$$F(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

Si scelga il versore  $\mathbf{n}$  con la terza componente non negativa.