UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

I appello (sessione autunnale) 11/09/2019, ore 10:00, aula L3 (Scienze)

Esercizio 1. Sia $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ un numero maggiore di 1.

1) Sviluppare in serie di soli seni la funzione

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \sin(\lambda x) & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{\lambda} \\ 0 & \frac{\pi}{\lambda} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

e discutere la convergenza della serie. [Punti 8]

Suggerimento: si ricordi che $2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

2) Utilizzando lo sviluppo precedente per $\lambda = \pi$, calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^2 - n^2}.$$ [Punti 2]

Esercizio 2. Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\big(1 - y^2(t)\big) \\ y'(t) = y(t)\big(x^2(t) - 4\big) \end{cases} \tag{S}$$

1) Si calcoli la soluzione di (S) con condizione iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. [Punti 2]

2) Si determinino gli equilibri E del sistema e se ne studi la stabilità con il metodo di linearizzazione. [Punti 3]

3) Si trovi un integrale primo per S sull'aperto $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. [Punti 4]

   Suggerimento: provare innanzitutto che una qualsiasi soluzione che parte da un punto di A resta in A su tutto il suo intervallo di definizione e soddisfa la relazione

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) - \left(\frac{4x'(t)}{x(t)} + \frac{y'(t)}{y(t)}\right) = 0.$$

   Costruire quindi un integrale primo per (S) su A a partire da tale identità.

4) Si studi la stabilità dell'equilibrio che si trova in A. [Punti 5]

Esercizio 3. Si consideri la porzione di superficie regolare

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z = 12\,,\ 0 \leqslant 4z \leqslant 4y + 17\Big\},$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale risulti positiva.

1) Calcolare il flusso normale del rotore del campo vettoriale $V(x, y, z) = (x+y, z, y^2)$ attraverso Σ. [Punti 8]

2) Determinare i punti di massima altezza z su Σ. [Punti 2]