UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

II appello - sessione estiva 22 luglio 2019

Esercizio 1.

1) Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si chiama serie derivata la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Se la serie derivata converge assolutamente in un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$, cosa possiamo dire circa la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$? [Punti 2]

2) Si determini il raggio di convergenza ρ della serie di potenze
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \log^2 n}.$$
[Punti 2]

Inoltre:

(a) si studi la convergenza della serie in $\pm\rho$; [Punti 2]

(b) si studi la convergenza uniforme della serie data; [Punti 2]

(c) si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie derivata. [Punti 4]

Esercizio 2.

1) Si determinino gli equilibri del sistema
$$\begin{cases} x'(t) = \big(x^2(t) - 1\big)\big(y^2(t) + 1\big) \\ y'(t) = \big(y^2(t) - 1\big)\big(x^2(t) + 1\big) \end{cases}$$
e se ne studi la stabilità. [Punti 4]

2) Siano $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ funzioni tali che

- $g(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- f ha n zeri semplici ($f(x_i) = 0$, $f'(x_i) \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$).

Si determinino gli equilibri del sistema
$$\begin{cases} x'(t) = f\big(x(t)\big)g\big(y(t)\big) \\ y'(t) = f\big(y(t)\big)g\big(x(t)\big) \end{cases}$$
e se ne studi la stabilità. [Punti 6]

Esercizio 3. Si consideri la porzione di superficie regolare

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z = 1\,,\ 2y + z \geqslant 0\Big\},$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale risulti positiva.

1) Calcolare il flusso normale del rotore del campo vettoriale $V(x, y, z) = (z, y^2, xz)$ attraverso Σ in due modi:

   (a) usando la definizione di integrale superficiale; [Punti 5]

   (b) applicando il teorema di Stokes. [Punti 5]

2) Determinare i punti di massima e minima altezza z su $\partial\Sigma$. [Punti 4]