UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

II esonero 7 giugno 2019

Esercizio 1.

1) Siano $x, y \geqslant 0$. Determinare la superficie laterale, $A(x, y)$, della superficie ottenuta come rotazione del segmento

$$\sigma_{x,y}(t) = ty + (1-t)x \qquad t \in [0,1]$$

intorno all'asse z. [punti 8]

2) Giustificare il fatto che la funzone A ha massimo sull'insieme

$$Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ : \ x^2 + y^2 = 1\big\}$$

e determinare i punti nei quali tale massio viene assunto. [punti 10]

Esercizio 2. Sia $X :]\tau_-, \tau_+[\to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = \frac{3}{2} t^2 X(t) + X^3(t) \\ X(0) = 1\,. \end{cases} \qquad (\star)$$

(a) Dimostrare che

(i) $X(t) > 0$ per ogni $t \in]\tau_-, \tau_+[$ [Punti 2]

(ii) X è crescente su $]\tau_-, \tau_+[$ e dedurne che $\tau_- = -\infty$ [Punti 3]

(iii) $\lim_{t\to-\infty} X(t) = 0$. [Punti 4]

(b) Sia Y la soluzione massimale del problema

$$\begin{cases} Y'(t) = Y^3(t) \\ Y(0) = \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che $X > Y$ su $[0, \tau_+[$ e dedurne che $\tau_+ < +\infty$. [Punti 4]

(ii) Osservato che l'equazione in $(\star)$ è di Bernoulli, calcolare

$$\int_0^{\tau_+} e^{t^3} dt.$$ [Punti 5]