

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

Sessione autunnale

Edificio Scienze, 14 settembre 2015, h 10:00, Aula L3

Esercizio 1. Si consideri la porzione di superficie regolare

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, x^2 + y^2 - z^2 = 1 \right\},$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale sia positiva.

- (a) Calcolare l'area di Σ , considerata come superficie di rotazione.
(b) Applicando il teorema di Stokes, calcolare il flusso del rotore del campo di vettori

$$V(x, y, z) = (x + y, z, y^2)$$

attraverso Σ .

Esercizio 2. (a) Determinare i coefficienti di una serie trigonometrica

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

che converga uniformemente su \mathbb{R} e verifichi

$$\begin{cases} (i) & S(x) = x(\pi - x), \quad \forall x \in [0, \pi] \\ (ii) & \int_{-a}^a S(x) dx = 0, \quad \forall a \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (\star)$$

- (b) Provare che S è univocamente determinata dalle proprietà (\star) .
(c) Resterebbe vera l'affermazione del punto precedente se si sostituisse la proprietà (ii) con

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) dx = 0?$$

Esercizio 3. (a) Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t)z(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t). \end{cases}$$

- (b) Studiare la stabilità dell'equilibrio $P_0 := (0, 1, 2)$ per linearizzazione.
(c) Determinare un integrale primo V e una funzione di Liapunov per l'equilibrio $P_1 := (0, 0, 0)$ e studiarne la stabilità. (*Suggerimento*: cercare V della forma $V = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$).