UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

Sessione estiva – II appello 22 luglio 2015, PP2 Aula 5

Esercizio 1. Data la porzione di superficie regolare

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z \geqslant 0\,,\; x^2 + y^2 \leqslant 1\,,\; \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4} = 1\Big\},$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale sia positiva, si calcoli:

(a) l'area di Σ;

(b) il flusso del rotore del campo di vettori

$$V(x, y, z) = (z^2 y, xyz, x^2)$$

attraverso Σ.

Esercizio 2. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\pi - 2\arctan x^n\big) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Suggerimento: si osservi che, per $y > 0$, risulta

$$\frac{\pi}{2} - \arctan y = \int_y^{\infty} \frac{du}{1+u^2} < \int_y^{\infty} \frac{du}{u^2}.$$

Esercizio 3. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale

$$x''(t) + \alpha x'(t) = 2\big(x(t) - x^3(t)\big). \tag{1}$$

1. Scrivere (1) come un sistema del primo ordine nel piano delle fasi e determinarne i tre equilibri.
2. Per $\alpha \neq 0$ studiare la stabilità dei tre equilibri usando il metodo di linearizzazione.

D'ora in poi supporremo sempre $\alpha = 0$.

3. Ancora per linearizzazione studiare la stabilità di uno dei tre punti di equilibrio.
4. Determinare un'integrale primo del sistema ed usarlo per studiare la stabilità dei rimanenti due punti di equilibrio.
5. Determinare la minima e massima distanza dall'origine dell orbita passante per il punto $\big(\sqrt{2}, \sqrt{3}\big)$.
6. Determinare tutte e sole le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = y_0. \end{cases}$$

per cui la corrispondente soluzione di (1) non è periodica.