UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

Sessione estiva – I appello | 16 giugno 2015

Esercizio 1. Fissato $a > 0$, calcolare l'area della porzione di superficie regolare ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z il grafico della funzione

$$f_a(z) = \cosh z \qquad (-a \leqslant z \leqslant a). \qquad [5]$$

Esercizio 2.

(a) Calcolare i coefficienti di Fourier del prolungamento periodico della funzione

$$f(x) = \pi - \frac{x^2}{\pi} \qquad -\pi \leqslant x < \pi$$

e discutere la convergenza della relativa serie. [4]

(b) Sia $f \in \mathscr{C}^1\big([-\pi,\pi]\big)$ una funzione pari e concava. Mostrare che i coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di f verificano

$$\begin{cases} a_{2k-1} \geqslant 0 \\ a_{2k} \leqslant 0 \end{cases} \qquad \forall k \geq 1. \qquad [4]$$

Esercizio 3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2\big(x^3(t) - x(t)\big) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad (1)$$

1. Dimostrare che la soluzione massimale di (1) è globale se $x_0 \in [-1, 1]$. [1]

2. Determinare l'intervallo di esistenza della soluzione massimale di (1) per $x_0 > 1$. [3]

Consideriamo ora l'equazione del secondo ordine

$$x''(t) = 2\big(x^3(t) - x(t)\big). \qquad (2)$$

3. Scrivere (2) nel piano delle fasi e determinarne i tre punti di equilibrio. [1]

4. Usare il metodo di linearizzazione per studiare la stabilità di uno dei tre punti di equilibrio. [2]

5. Determinare un'integrale primo del sistema ed usarlo per studiare la stabilità di un secondo punto di equilibrio. [4]

6. Determinare la minima distanza dall'origine dell'orbita passante per $(1/\sqrt{2}, 0)$. [4]

7. Studiare la stabilità del rimanente punto di equilibrio analizzando la soluzione massimale di (2) che soddisfa le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1. \end{cases} \qquad [4]$$

Suggerimento: il problema si risolve esplicitamente utilizzando l'integrale primo determinato nel punto 5.