UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

Lunedì 19 gennaio 2015, ore 10:00, aula 11

Esercizio 1. Fissato $a \in (0, \pi/2]$, si ponga

$$f_a(x) = \max\left\{ 0\,,\ 1 - \frac{|x|}{2a} \right\} \qquad (-\pi \leqslant x < \pi)$$

e si indichi con $f_a^{\#}$ il prolungamento periodico di f_a.

1) Si determini la serie di Fourier di $f_a^{\#}$ e se ne studi la convergenza puntuale e uniforme. [Punti 6]

2) Si calcoli la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2(an)}{n^2}$. [Punti 2]

Esercizio 2. Sia Σ la porzione di superficie regolare definita da

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 + x^2 + y^2\,,\ z \leqslant 5 \right\}$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale sia negativa.

1) Calcolare il flusso del rotore del campo campo vettoriale

$$V(x,y,z) = (x^2 y, z + y, x - z)$$

attraverso Σ. [Punti 4]

2) Determinare la distanza di Σ dal piano $x + y - 2z = 0$. [Punti 7]

Esercizio 3. Sia $\big(x(\cdot), y(\cdot)\big) : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^2$ la soluzione massimale del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y^2(t) \\ y'(t) = x(t) - y^2(t) \end{cases} \tag{1}$$

con condizioni iniziali

$$\big(x(0), y(0)\big) = (x_0, y_0) \in Q := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\,,\ y > 0 \right\}. \tag{2}$$

1) **a:** Dimostrare che $x(t) > 0$ per ogni $t \in [0, t_+)$. [Punti 1]

Suggerimento: ossevare che $\big(e^t x(t)\big)' \geqslant 0$ per ogni $t \in (-t_-, t_+)$.

b: Dimostrare che $y(t) > 0$ per ogni $t \in [0, t_+)$. Dedurne che $\big(x(t), y(t)\big) \in Q$ per ogni $t \in [0, t_+)$. [Punti 2]

Suggerimento: si supponga, per assurdo, $\mathscr{T} := \big\{t \in [0, t_+) \ : \ y(t) \leqslant 0\big\} \neq \emptyset$ e si ponga $\tau = \inf \mathscr{T}$. Si valuti quindi $y'(\tau)$.

2) Determinare i punti di equilibrio del sistema (1) che appartengono a Q e provare a studiarne la stabilità con il metodo di linearizzazione. [Punti 2]

3) Osservato che $V(x, y) := x + y$ è un integrale primo del sistema, dimostrare che:

a: $t_+ = +\infty$, [Punti 2]

b: $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ sono funzioni monotone su $[0, +\infty)$, [Punti 3]

c: ogni soluzione di (1)-(2) converge per $t \to +\infty$ a un punto di equilibrio $(\widehat{x}_0, \widehat{y}_0)$ del sistema. [Punti 2]

4) Posto $u(t) = x(t) - \widehat{x}_0$ e osservato che $y(t) = \widehat{y}_0 - u(t)$, dimostrare che

$$U(t) := u^2(t)$$

verifica

$$U'(t) + 2U(t) = -2u^2(t)\big(\widehat{y}_0 + y(t)\big) \leqslant 0 \qquad \forall\, t \geqslant 0\,.$$

Dedurne che

$$|x(t) - \widehat{x}_0| \leqslant |x_0 - \widehat{x}_0| e^{-t} \quad \text{e} \quad |y(t) - \widehat{y}_0| \leqslant |x_0 - \widehat{x}_0| e^{-t}$$

per ogni $t \geqslant 0$. [Punti 4]