UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

Lunedì 15 settembre 2014, ore 10:00, aula L3

Esercizio 1. Sviluppare in serie di Fourier le funzioni

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi - |x| \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi \\ g(x) &= \begin{cases} 1 & -\pi \leqslant x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & 0 < x \leqslant \pi \end{cases} \end{aligned}$$

e studiare la convergenza delle serie trovate. [Punti 7]

Dire se esistono legami tra gli sviluppi delle funzioni f e g. [Punti 2]

Esercizio 2. Sia Σ la porzione di superficie regolare definita da

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 = 1 + x^2 + y^2 \, , \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \, , \ z \geqslant 0\right\}$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale sia positiva.

1) Calcolare il flusso del rotore del campo campo vettoriale

$$V(x, y, z) = (x^2y, z - y, x + z)$$

attraverso Σ, usando sia la definizione che il teorema di Stokes. [Punti 7]

2) Determinare i punti di Σ a distanza minima dal punto $(1/2, 0, 0)$. [Punti 4]

Esercizio 3. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \sin\big(3x(t) - y(t)\big) \\ y'(t) = e^{x(t)} - 1 \, . \end{cases}$$

1) Mostrare che, per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la soluzione massimale del sistema che assume il valore iniziale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ è globale. [Punti 6]

   Suggerimento: ad esempio, si può provare a far vedere che $|x(t)| \leqslant e^{|t|}(|x_0| + |t|)$.

2) Determinare i punti di equilibrio del sistema. [Punti 2]

3) Studiare la stabilità di tali punti di equilibrio. [Punti 4]