UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

II appello — Martedì 22 luglio 2014, ore 10:00, aula 18

Esercizio 1. Data $f \in C^1(\mathbb{R})$, poniamo $\forall t \in \mathbb{R}$

$$x_0(t) = f(t)\,, \quad x_n(t) = \int_0^t x_{n-1}(s)ds \ \ (n \geqslant 1)$$

1) Calcolare $x_n(\cdot)$ per $f(t) \equiv 1$. [Punti 3]

2) Dimostrare che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$ converge totalmente sui compatti di $\mathbb{R}$ ad una funzione $x \in C^1(\mathbb{R})$. [Punti 5]

3) Esprimere x' in funzione di x e f e calcolare $x(\cdot)$ per $f(t) = e^t$. [Punti 5]

Esercizio 2.

1) Applicando il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$, calcolare il volume dell'ellissoide di semiassi $a, b, c > 0$ dato da

$$E(a,b,c) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\Big\}.$$

[Punti 5]

2) Determinare l'ellissoide $E(a,b,c)$ di volume massimo tra tutti quelli che verificano

$$a + 2b + 3c = 18.$$

[Punti 5]

Esercizio 3. Sia $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi'(x)| < 1$.

1) Provare che ogni soluzione massimale del sistema

$$\begin{cases} x' = y - \phi(x) \\ y' = x - \phi(y) \end{cases} \tag{1}$$

è globale. [Punti 4]

2) Provare che il sistema (1) ha un unico punto di equilibrio, e che tale equilibrio è sempre instabile. [Punti 6]