UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

18 settembre 2013 *Prof. P. Cannarsa*

Esercizio 1. Sviluppare la funzione

$$f(x) = \pi - x \qquad (x \in [0, \pi])$$

in serie di Fourier di soli coseni.

Esercizio 2. Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2x^3(t)\,. \end{cases} \tag{1}$$

1) Si calcolino gli equilibri del sistema e si determini la natura di almeno uno di essi per linearizzazione.

2) Si verifichi che $V(x, y) \doteq x^4 + y^2 - x^2$ è un integrale primo del sistema (1).

3) Si determini la natura degli equilibri rimanenti.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2)\,\mathbf{i} + (x^2 - z^2)\,\mathbf{j} + (y^2 - x^2)\,\mathbf{k}\,,$$

calcolare il flusso del rotore di F attraverso la porzione di superficie

$$\Sigma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4\,,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\,,\ z \geqslant 0\big\}\,,$$

orientata in modo che il versore normale abbia la terza componente $\geqslant 0$.

Esercizio 4.

1) Dato $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $\|v\| = 1$, sia $\mathbb{R}v = \{tv \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ la retta per l'origine generata da v. Dimostrare che la distanza di un generico punto $x \in \mathbb{R}^3$ da $\mathbb{R}v$ è data da

$$d_v(x) = \sqrt{\|x\|^2 - (x \cdot v)^2}\,.$$

2) Posto $v = \big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\big)$, determinare gli eventuali punti dell'insieme

$$M = \big\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 1 + x_1^2 + x_2^2\big\}$$

che si trovano a distanza minima dalla retta $\mathbb{R}v$.