24 luglio 2013

Corso di Laurea in Matematica

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

Esercizio 1. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,, \qquad (x \in \mathbb{R})\,. \tag{1}$$

(a) Determinare il raggio di convergenza, r, della serie (1) e studiarne la convergenza puntuale e uniforme.

(b) Detta f la somma della serie (1), e I il suo intervallo di convergenza, studiare la derivabilità di f su I e calcolare f' nei punti in cui esiste la derivata.

(c) Dedurre che

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x}\, dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;\Big(=\frac{\pi^2}{6}\Big)\,.$$

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$x'''(t) + x'(t) - x(t) + x^3(t) = 0\,.$$

- Si riporti l'equazione data ad un sistema differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^3$.
- Si determinino i punti di equilibrio del sistema così ottenuto e se ne studi la stabilità applicando il teorema di linearizzazione.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}\,,$$

calcolare il flusso del rotore di F attraverso la porzione di superficie

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 = 1\,,\; z \geqslant 0\Big\}\,,$$

orientata in modo che il versore normale abbia la terza componente $\geqslant 0$.

Esercizio 4. Determinare la distanza dall'origine di $\mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z^2 - xy = 1\Big\}\,.$$