12 giugno 2013

Corso di Laurea in Matematica

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = x^4, \quad x \in [-\pi, \pi)\,,$$

si estenda f a $\mathbb{R}$ in modo che diventi una funzione 2π-periodica.

- Determinare la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza puntuale e uniforme.
- Ricordando che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\,,$$

calcolare il flusso del rotore di F attraverso la porzione di superficie di equazione $z = xy$, che si proietta sul dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leqslant 1\right\},$$

orientata in modo che il versore normale abbia la terza componente non negativa. Effettuare il calcolo sia direttamente, sia applicando il teorema di Stokes.

Esercizio 3. Data $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\varphi\big(y(t)\big) \\ y'(t) = y(t)\varphi\big(x(t)\big)\,. \end{cases} \tag{1}$$

1) Si provi che, per ogni soluzione $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$ di (1), si ha

$$\exists\, t_0 \in I \;:\; x(t_0) = y(t_0) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = y(t) \quad \forall t \in I\,.$$

2) Osservato che $(0,0)$ è un punto di equilibrio di (1), se ne studi la stabilità in ciascuno dei casi seguenti:
   - supponendo $\varphi(0) \neq 0$,
   - prendendo $\varphi(x) = -x^2$.

Esercizio 4. Determinare il punto della retta $2y - x = 1$ che si trova a distanza minima dall'iperbole $y^2 - x^2 = 1$.