UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica 2 Ing. Elettronica e Telecomunic.

Esercizi – 19.III.2002

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$(a)\ \int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx \qquad (b)\ \int \frac{x+2}{x^2-3x+2}\,dx \qquad (c)\ \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx.$

$(d)\ \int \frac{2x}{x^2+4x+4}\,dx \qquad (e)\ \int \frac{2x+3}{3x^2-9x+6}\,dx \qquad (f)\ \int \frac{dx}{4-x^2}$

$(g)\ \int \frac{2}{4x+x\ln^2 x}\,dx \qquad (h)\ \int \frac{dx}{e^x+4e^{-x}-4} \qquad (i)\ \int \frac{e^{-3x}}{e^{-6x}+2e^{-3x}-3}\,dx.$

$(l)\ \int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx \qquad (m)\ \int \frac{2x}{x^4+2x^2+4}\,dx \qquad (n)\ \int \frac{\sin x}{\cos x-\sin^2 x}\,dx.$

$(o)\ \int \frac{x^2}{1+\sqrt{x+2}}\,dx \qquad (p)\ \int \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}\,dx \qquad (q)\ \int x\sqrt{2x+3}\,dx.$

2. Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti e in caso affermativo calcolarne il valore:

$(a)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} \qquad (b)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x} \qquad (c)\ \int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+x}\,dx \qquad (d)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

$(e)\ \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx \qquad (f)\ \int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}\,dx \quad (g)\ \int_0^{+\infty} \sin(2x)e^{-x}\,dx \qquad (h)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

3. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono i seguenti integrali impropri:

$(a)\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} \qquad (b)\ \int_0^1 \frac{dx}{(\sin x)^\alpha} \qquad (c)\ \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx$

$(d)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^4}\,dx \qquad (e)\ \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx \qquad (f)\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$

$(g)\ \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{2+\alpha}}+\frac{1}{x^{2-\alpha}}\right)dx \qquad (h)\ \int_0^1 \left(\frac{1}{x^{2+\alpha}}+\frac{1}{x^{2-\alpha}}\right)dx \qquad (i)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^{2+\alpha}+x^{2-\alpha}}.$

4. Posto $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ per $x \in \mathbb{R}$, tracciare un grafico approssimativo di F.

5. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $|f(x)-f(y)| \le L|x-y|$ per ogni $x, y \in [a,b]$ (NB una tale f si dice *lipschitziana*). Mostrare che, se $\mathcal{D}$ è una suddivisione di $[a,b]$ in intervalli di ampiezza al più d, allora $M_i - m_i \le dL$ per ogni i e $S(\mathcal{D},f) - s(\mathcal{D},f) \le dL(b-a)$.

6. Sia $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che $f(0) = 0$ e $\int_0^5 f(x)\,dx = 6$. Mostrare che $f(2) \le 2$. (Sugg.: scrivere $\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f$ e stimare dal basso i due integrali usando l'ipotesi che f è crescente).