Esercizi sulle serie

Lista n.3 di martedì 26 marzo 2002

$\boxed{62}$

Siano $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e $b_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$. Mostrare che, pur essendo $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ non hanno lo stesso carattere. Dire se ciò contraddice il criterio del confronto asintotico.

$\boxed{63}$

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi tali che, definitivamente in n, si abbia $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Mostrare che se $\sum b_n$ converge allora anche $\sum a_n$ converge.

$\boxed{64}$

Mostrare che se $\sum a_n$ converge allora $\sum b_n$ e $\sum (b_n + a_n)$ hanno lo stesso carattere.

$\boxed{65}$

Sia $\alpha > 1$ e sia $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Mostrare che $\sum b_n$ e $\sum (b_n + a_n)$ hanno lo stesso carattere.

$\boxed{66}$

Mostrare che $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

$\boxed{67}$

Dimostrare il seguente teorema: siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che:

[a] esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq C$,

[b] $b_n \to 0$ decrescendo;

Allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge (criterio di Abel). Si osservi che ponendo $a_n = (-1)^n$ si ottiene, come caso particolare, il criterio di Leibniz.

$\boxed{68}$

Studiare il carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dove (a_n) è definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - a_n^2 \\ a_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

©Callegari Emanuele c/o dip. Matematica, Univ. Roma Tor Vergata - consentito solo utilizzo personale e non commerciale
www.mat.uniroma2.it/~callegar