Analisi Matematica I/2

Simul.A

A.A. 2005-2006
25 Febbraio 2006

Problema 1.

Sia $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^2}$.

(1) Trovare una primitiva di $f(x)$.

(2) Usare il punto (1) per trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^{13} + x^5}$.

Problema 2.

Sia dato l'integrale improprio:

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{5-\alpha^2} \ln^\alpha x} \, dx.$$

(3) Calcolarlo per $\alpha = 2$.

(4) Dire per quali altri $\alpha \in \mathbf{R}$ converge.

Problema 3.

Studiare, motivando la risposta, il carattere delle seguenti serie:

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

(7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ (facoltativa).

Problema 4.

Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ definiamo $f(x, y) = x^2 + y^2 - e^{xy} + 1$

(8) Trovare tutti i punti stazionari di $f(x, y)$ e studiarne la natura.

(9) Calcolare, se esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$, motivando la risposta.

Problema 5.

Siano dati i due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -(3x^2 + 1) y \ln y \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y' = -(3x^2 + 4y^2) y \ln y \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Indichiamo con $y_1(x)$ la soluzione del primo e con $y_2(x)$ quella del secondo.

(10) Calcolare esplicitamente $y_1(x)$ e mostrare che $y_1(x) \to 1$ per $x \to +\infty$.

(11) Mostrare, senza calcolarla esplicitamente, che $y_2(x) \to 1$ per $x \to +\infty$.

Punteggi:(4+2)+(3+3)+(3+3+?)+(5+4)+(5+4)
Tempo: 3 ore