Problema 1. = pbBDK
formula 1. = pbBDK1
formula 2. = pbBDK2
Problema 2. = pbBDM
formula 3. = pbBDM1
formula 4. = pbBDM2
Problema 3. = pbBDL
formula 5. = pbBDL1
formula 6. = pbBDL2
formula 7. = pbBDL3
Problema 4. = pbBDJ
formula 8. = pbBDJ1
formula 9. = pbBDJ2
Problema 5. = pbBDI
formula 10. = pbBDI1
formula 11. = pbBDI2
Soluzione 1. = spBDK del Problema 1 . = pbBDK
Soluzione 2. = spBDM del Problema 2 . = pbBDM
Soluzione 3. = spBDL del Problema 3 . = pbBDL
Soluzione 4. = spBDJ del Problema 4 . = pbBDJ
formula 12. = spBDJ1
formula 13. = spBDJ2
formula 14. = spBDJ3
Soluzione 5. = spBDI del Problema 5 . = pbBDI

Analisi Matematica I/2

Simul.A

A.A. 2005-2006
25 Febbraio 2006

Problema 1.

Sia $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^2}$.

(1) Trovare una primitiva di $f(x)$.
(2) Usare il punto (1) per trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^{13} + x^5}$.

Problema 2.

Sia dato l'integrale improprio:

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{5-\alpha^2} \ln^\alpha x}\, dx.$$

(3) Calcolarlo per $\alpha = 2$.
(4) Dire per quali altri $\alpha \in \mathbf{R}$ converge.

Problema 3.

Studiare, motivando la risposta, il carattere delle seguenti serie:

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,
(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
(7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ (facoltativa).

Problema 4.

Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ definiamo $f(x, y) = x^2 + y^2 - e^{xy} + 1$

(8) Trovare tutti i punti stazionari di $f(x, y)$ e studiarne la natura.
(9) Calcolare, se esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$, motivando la risposta.

Problema 5.

Siano dati i due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -(3x^2 + 1)y \ln y \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y' = -(3x^2 + 4y^2)y \ln y \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Indichiamo con $y_1(x)$ la soluzione del primo e con $y_2(x)$ quella del secondo.

(10) Calcolare esplicitamente $y_1(x)$ e mostrare che $y_1(x) \to 1$ per $x \to +\infty$.
(11) Mostrare, senza calcolarla esplicitamente, che $y_2(x) \to 1$ per $x \to +\infty$.

Punteggi:(4+2)+(3+3)+(3+3+?)+(5+4)+(5+4)
Tempo: 3 ore

Soluzione del Problema 1.

Cominciamo dal punto (1).
Si ha:

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

da cui segue:

$$\int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = -\frac{1}{x} - \arctan x.$$

Quindi una primitiva di $\frac{1}{x^4+x^2}$ è data da $-\frac{1}{x} - \arctan x$.
Passiamo al punto (2).
Osserviamo che

$$\int \frac{1}{x^{13}+x^5}\,dx = \int \frac{1}{x^5(x^8+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^8(x^8+1)}\,dx.$$

quindi, ponendo $y = x^4$ e osservando che $4x^3 = \left(x^4\right)'$, si ottiene

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^8(x^8+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^2(y^2+1)}\,dy = -\frac{1}{4y} - \frac{1}{4}\arctan y = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{4}\arctan x^4,$$

dove nell'ultima uguaglianza si è fatto uso del risultato già ottenuto al punto precedente.

Soluzione del Problema 2.

Cominciamo dal punto (3).
Per $\alpha = 2$ si ha:

$$\begin{aligned}\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{1}{\ln^2 x}(\ln x)'\,dx \\ &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^{\ln b}\frac{1}{y^2}\,dy = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{y}\right]_1^{\ln b} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+1\right) = 1\end{aligned}$$

Passiamo al punto (4).
È noto che, se $c > 1$, l'integrale improprio

$$\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x}\,dx$$

converge per ogni b quando $a > 1$, diverge per ogni b quando $a < 1$ e converge per $b > 1$ quando $a = 1$.
Di conseguenza l'integrale assegnato converge sicuramente quando $5-\alpha^2 > 1$, cioè per $|\alpha| < 2$, diverge sicuramente quando $5-\alpha^2 < 1$, cioè per $|\alpha| > 2$, mentre quando $5-\alpha^2 = 1$, cioè per $|\alpha| = 2$, converge per $\alpha = 2$ e diverge per $\alpha = -2$.
Concludendo, si ha convergenza se e solo se $2 < \alpha \leq 2$.

Soluzione del Problema 3.

Cominciamo dal punto (5).
È immediato constatare che $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ decrescendo, quindi alla serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ si può applicare il criterio di Leibniz, ottenendo che converge.

Passiamo al punto (6).
Dal fatto che $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ decrescendo segue che anche $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ decrescendo. In particolare la decrescenza di $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ segue dal fatto che è composizione di $\ln(1+x)$, che è una funzione crescente del suo argomento, con $\frac{1}{\sqrt{n}}$ che è una successione decrescente.
A questo punto, visto che $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ decrescendo, anche alla serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ posso applicare il criterio di Leibniz e concludere che converge.

Passiamo al punto (7).
Questa volta, pur essendo ancora una serie a segni alterni, non si può più applicare il criterio di Leibniz.
Per studiare il comportamento di (7) procediamo in modo diverso.
Osserviamo intanto che

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Osserviamo però che $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, come si è visto al punto (5), mentre $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ diverge a $-\infty$, come si può constatare operando un confronto asintotico con la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} -\frac{1}{2n}$, che è a segno costante e diverge a $-\infty$.
Di conseguenza la (7) risulta somma di due serie, una convergente e l'altra divergente a $-\infty$, quindi anch'essa diverge a $-\infty$.

Soluzione del Problema 4.

Cominciamo dal punto (8). Si osservi che $f(x, y)$ è definita e regolare su tutto $\mathbf{R}^2$ e che le sue derivate parziali prime sono date da:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - ye^{xy} \\ f_y(x, y) &= 2y - xe^{xy}. \end{aligned}$$

I punti stazionari di f sono tutti e soli quelli che annullano simoltaneamente f_x e f_y, cioè tutte e sole le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2x - ye^{xy} = 0 \\ 2y - xe^{xy} = 0 \end{cases}$$

cioè del sistema:

$$\begin{cases} 2x = ye^{xy} \\ 2y = xe^{xy} \end{cases} \tag{12}$$

Osserviamo che dalla (12) segue che se $x = 0$ allora anche $y = 0$, e viceversa.
Di conseguenza, tolta la soluzione $(0, 0)$, tutte le altre eventuali soluzioni del sistema (12) hanno entrambe le coordinate non nulle. Per trovarle è quindi lecito operare nel sistema (12) supponendo, d'ora in poi, che x e y siano entrambe non nulle.
In particolare possiamo dividere membro a membro le 2 equazioni di (12), ottenendo:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x},$$

cioè:

$$x^2 = y^2. \tag{13}$$

Poichè però da (12) segue che x e y devono avere lo stesso segno, la (13) diventa:

$$x = y. \tag{14}$$

Di conseguenza, da (12) e (14) segue che:

$$2x = xe^{x^2},$$

cioè:

$$e^{x^2} = 2,$$

cioè:

$$x = \pm\sqrt{\ln 2}.$$

Le soluzioni del sistema (12) sono quindi tre:

$$A = (0, 0) \qquad B = (\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) \qquad e \qquad C = (-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}).$$

Ora che abbiamo trovato i tre punti stazionari dobbiamo studiarne la natura. A tale scopo osserviamo che:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2 - y^2e^{xy} \\ f_{xy}(x, y) &= -(1 + xy)e^{xy} \\ f_{yy}(x, y) &= 2 - x^2e^{xy}. \end{aligned}$$

Quindi la matrice Hessiana di f è:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - y^2e^{xy} & -(1 + xy)e^{xy} \\ -(1 + xy)e^{xy} & 2 - x^2e^{xy} \end{pmatrix}.$$

Nel punto $A = (0, 0)$ si ha:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$, che sono entrambi positivi e quindi $A = (0, 0)$ è un punto di minimo.
Nel punto $B = (\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$ si ha:

$$H(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = \begin{pmatrix} 2 - e^{\ln 2}\ln 2 & -(1 + \ln 2)\, e^{\ln 2} \\ -(1 + \ln 2)\, e^{\ln 2} & 2 - e^{\ln 2}\ln 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2\ln 2 & -2 - 2\ln 2 \\ -2 - 2\ln 2 & 2 - 2\ln 2 \end{pmatrix}.$$

Anche qui si potrebbe trovare i 2 autovalori e scoprire che hanno segno opposto, tuttavia il modo più rapido di verificarlo è ricordare che il prodotto degli autovalori è il determinante della matrice, che in questo caso è facile vedere che è negativo perchè vale $-16\ln 2$. Possiamo quindi concludere che gli autovalori della matrice Hessiana hanno segno opposto e quindi B è un punto di sella.

In modo del tutto analogo si trova che è un punto di sella anche C.

Passiamo al punto (9).
Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2-e^{xy}+1}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1-\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}\right) = 1 - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} \\ &= 1 - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+o(xy)}{x^2+y^2} = 1 - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Ma quest'ultimo limite non esiste, perchè se ci si restringe a curve diverse si ottengono limiti diversi.
Infatti:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

mentre

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = 2.$$

Si può quindi concludere che il limite non c'è.

Soluzione del Problema 5.

Cominciamo dal punto (10).
L'equazione assegnata è a variabili separabili [...]

Passiamo al punto (11).
Vi sono molti modi, uno è quello di applicare il teorema del confronto tra i 2 problemi di Cauchy [...]