Corso di

Analisi Matematica 2

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **1**

A.A. 2010-2011
27 Settembre 2010
ore 11.30-13.15

1. Contenuti della Lezione

Gli argomenti trattati a lezione sono tutti contenuti nel paragrafo **10.1** del libro di testo, ad eccezione della definizione di insieme discreto, che è la seguente: *un insieme A si dice* **discreto** *se ogni suo punto è un punto isolato.*
Lo studente rifletta sul fatto che un insieme discreto, benché costituito solo da punti isolati, può ugualmente avere dei punti di accumulazione! (si veda ad esempio l'insieme N nel problema **1**)
Per quanto riguarda tutti i concetti introdotti nel paragrafo **10.1**, si osservi che le loro definizioni non compaiono esplicitamente in tale paragrafo, che invece si limita ad affermare che esse sono formalmente identiche a quelle già introdotte per $\mathbf{R}$ ad Analisi 1.
Tuttavia, essendo queste state esplicitamente richiamate a lezione, ci si aspetta che lo studente le sappia ripetere con disinvoltura.
Un modo semplice per verificare se ha assimilato la lezione è quello di rispondere alle **domande di verifica** che trova più sotto.
Inoltre non trascuri di testare la sua effettiva comprensione svolgendo i problemi proposti.

2. Lavoro proposto per casa

Per questa lezione lo studente può limitarsi a risolvere almeno la metà dei problemi proposti e a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

3. Lista dei problemi

1. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y=1\},\\
B &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\},\\
C &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y\le 1\},\\
D &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\},\\
E &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x+y|\le 1\},\\
F &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x+y|> 1\},\\
G &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|< 1\},\\
H &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|\ge 1\},\\
I &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2> 1\},\\
J &= \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\},\\
K &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\ne 0,\ y\ne 0\},\\
L &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{Q},\ y\in\mathbf{R}\},\\
M &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R},\ y=\frac{1}{n},\ \text{con } n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\},\\
N &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x=0,\ y=\frac{1}{n},\ \text{con } n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\},\\
O &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y=1, x\in\mathbf{Q}\},\\
P &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y\in\mathbf{Q}\},\\
Q &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y=\frac{1}{n},\ \text{con } n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\},\\
R &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x-y=n,\ x+y=\frac{1}{m},\ \text{con } n,m\in\mathbf{Z} \text{ e } m\ne 0\right\},\\
S &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{m}{n},\ \text{con } n,m\in\mathbf{Z} \text{ e } n\ne 0\right\}.
\end{aligned}
$$

2. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei complementari degli insiemi elencati nel problema 1.

3. Di ciascuno degli insiemi elencati nel problema 1 e dei loro comlementari, dire, motivando la risposta, se sono aperti, chiusi, limitati, densi, discreti.

4. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1\},\\
B &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1,\ z=\frac{1}{2}\right\},\\
C &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\},\\
D &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z\le 1\},\\
E &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z\ge 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\},\\
F &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid |x+y+z|\le 1\},\\
G &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid |x+y|+|z|\le 1\},\\
H &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid |x|+|y|+|z|\le 1\},\\
I &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid |x+y|\le 1\},\\
J &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid |x|+|y|\le 1\},\\
K &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid |x|\le 1\},\\
L &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2> 1\},\\
M &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1\},\\
N &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 2\},\\
O &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+z^2\le 2\},\\
P &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid xyz=0\},\\
Q &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid xyz>0\},\\
R &= \mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\},\\
S &= \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Q},\\
T &= \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{R},\\
U &= \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Z},\\
V &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{m},\ z=\frac{p}{m},\ \text{con } n,m,p\in\mathbf{Z},\ n\ne 0 \text{ e } m\ne 0\right\},\\
W &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{m},\ z=\frac{p}{n},\ \text{con } n,m,p\in\mathbf{Z},\ n\ne 0 \text{ e } m\ne 0\right\},\\
X &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{m},\ z=\frac{p}{mn},\ \text{con } n,m,p\in\mathbf{Z},\ n\ne 0 \text{ e } m\ne 0\right\}.
\end{aligned}
$$

5. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei complementari degli insiemi elencati nel problema 4.

6. Di ciascuno degli insiemi elencati nel problema 4 e dei loro comlementari, dire, motivando la risposta, se sono aperti, chiusi, limitati, densi, discreti.

4. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 1.

Dare la definizione di distanza euclidea in R^2 e in generale in R^n.

Domanda 2.

Dare la definizione di intorno di un punto in R^2 e in R^n.

Domanda 3.

Dato $A \subset \mathbf{R}^2$, dare la definizione di punto **interno**, **esterno**, **di frontiera**, **di accumulazione** e **isolato** di A.
Definire inoltre gli insiemi $\mathring{A}$, $\overline{A}$, ∂A e DA.
In generale fare lo stesso in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 4.

Dato $A \subset \mathbf{R}^2$, dire cosa significa che esso è **aperto**, **chiuso**, **denso**, **discreto**. **limitato**, **finito**.
In generale fare lo stesso in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 5.

Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza gli insiemi chiusi usando i punti di accumulazione o i punti di frontiera.

Domanda 6.

Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbf{R}^n$.