Domande per il secondo esonero

1. Dare la definizione di $\sigma-$algebra.
2. Dimostrare che una $\sigma-$algebra è stabile anche per intersezione numerabile.
3. Dare la definizione di misura.
4. Mostrare che la "misura" di Peano-Jordan non è una misura.
5. Dare la definizione di misura "esterna" di Lebesgue (Definizione 23).
6. Dire se la misura esterna di Lebesgue è una misura su tutto $\mathcal{P}(\mathbf{R}^2)$, motivando la risposta.
7. Dare la definizione di insieme misurabile secondo Lebesgue.
8. Enunciare il teorema di Carateodory.
9. Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza $\mu(A)$, quando A è unione di una famiglia numerabile crescente di insiemi o intersezione di una famiglia numerabile decrescente di insiemi.
10. Mostrare che l'ipotesi $\mu(A_0) < +\infty$ è indispensabile per mostrare che $\mu(A_i) \to \mu(A)$ se $A = \bigcap A_i$ dove $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ è una famiglia numerabile decrescente di insiemi.
11. Enunciare il teorema che tratta della misurabilità di aperti e chiusi e dell'approssimabilità con essi di insiemi misurabili.
12. Dare la definizione di funzione misurabile a valori in $\mathbf{R}$.
13. Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza le funzioni misurabili a valori in $\mathbf{R}$.
14. Dare la definizione di funzione misurabile a valori in $[-\infty, +\infty]$.
15. Enunciare il teorema che caratterizza le funzioni misurabili a valori in $[-\infty, +\infty]$.
16. Enunciare e dimostrare il teorema che tratta della stabilità per della famiglia delle funzioni misurabili passando al limite e al sup o inf numerabili.
17. Definire l'integrale di $\aleph_A(x)$ con A misurabile.
18. Dare la definizione di funzione semplice.
19. Definire l'integrale di φ, con φ semplice e positiva.
20. Dire, motivando la risposta, se una φ semplice è rappresentabile univocamente come combinazione lineare di funzioni caratteristiche.
21. Definire l'integrale di Lebesgue per f misurabile non negativa.
22. Definire l'integrale di Lebesgue per f misurabile a segno qualsiasi.
23. Dare la definizione di funzione sommabile.
24. Definire l'integrale di Lebesgue su un sottoinsieme E di $\mathbf{R}$ misurabile.
25. Dire a cosa è uguale $\int_E \varphi(x)$ se $\varphi = \alpha_1 \aleph_{A_1}(x) + \alpha_2 \aleph_{A_2}(x) + \ldots + \alpha_n \aleph_{A_n}(x)$.
26. Enunciare e dimostrare il teorema che, fissata φ semplice e non negativa, descrive la proprietà dell'applicazione che ad ogni E misurabile associa $\int_E \varphi(x)dx$.
27. Enunciare e dimostrare il teorema della convergenza monotona.
28. Enunciare il Lemma di Fatou ed esibire un esempio in cui vale la disuguaglianza stretta.
29. Enunciare il teorema della convergenza dominata ed esibire un esempio in cui, mancando una g che domina le f_n, la tesi del teorema non vale.
30. Dire cosa significa che una proprietà vale quasi ovunque.
31. Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza le funzioni non negative con integrale nullo.
32. Dare la definizione di $L^2(E)$.
33. Enunciare e dimostrare il teorema che descrive $f^{-1}(\{+\infty\})$ per le f aventi integrale finito.
34. Eseguire la prima parte della dimostrazione della completezza di $L^2(E)$ (Teorema 25).
35. Eseguire la seconda parte della dimostrazione della completezza di $L^2(E)$. (Teorema 26).
36. Definire $L^p(E)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$
37. Definire il sup essenziale di una funzione misurabile.
38. Definire $L^\infty(E)$
39. Definire $\mathcal{B}(H, V)$ con H, V spazi di Hilbert.
40. Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza gli operatori lineari e continui tra spazi di Hilbert.
41. Definire la norma di $\mathcal{B}(H, V)$ con H, V spazi di Hilbert.
42. Enunciare il teorema che dà modi equivalenti di definire la norma di $\mathcal{B}(H, V)$ con H, V spazi di Hilbert.
43. Dare un esempio di $A \in \mathcal{B}(H)$ iniettiva ma non suriettiva, motivando la risposta.
44. Dare la definizione di isometria tra spazi di Hilbert.
45. Dare un esempio di isometria non suriettiva.
46. Dare la definizione di applicazione bilineare.
47. Dare un esempio di applicazione bilineare, motivando la risposta.
48. Dare un esempio di applicazione bilineare su spazi di dimensione infinita, motivando la risposta.
49. Dare la definizione di applicazione bilineare limitata.
50. Dare un esempio di applicazione bilineare limitata su spazi di Hilbert di dimensione infinita, motivando la risposta.
51. Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza le applicazioni bilineari limitate usando gli operatori lineari e continui.
52. Dare la definizione di contrazione.
53. Enunciare il teorema delle contrazioni.
54. Dare la definizione di coercitività per un'applicazione bilineare.
55. Dare la definizione di coercitività per $A \in \mathcal{B}(H)$.
56. Enunciare e dimostrare la prima parte del teorema di Lax-Milgram.
57. Enunciare e dimostrare la seconda parte del teorema di Lax-Milgram.
58. Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza le funzioni continue h tali che $\int_a^b h(x)v(x)dx = 0$ per ogni $v \in C_0^1((a,b))$.

59. Dare la definizione di soluzione debole per il problema di Sturm-Liouville.
60. Enunciare e dimostrare il teorema che stabilisce l'equivalenza tra essere soluzione debole ed essere soluzione classica nel caso che u sia sufficientemente regolare.
61. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré.