Università di Roma Tor Vergata

Corsi di Laurea in Ing. Edile-Architettura e Ing. dell'Edilizia

Analisi Matematica II (8 o 9 crediti)

A.A. 2012-2013 - docente: E.Callegari

1. **Topologia in $\mathbf{R}^n$.** Intorno di un punto. Punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, isolati. Insiemi aperti, chiusi, densi, discreti, limitati. Teorema di Bolzano Weierstrass. Successioni in $\mathbf{R}^n$ e loro limiti. Insiemi compatti per successioni e loro caratterizzazione come insiemi chiusi e limitati.

2. **Limiti e Continuità per funzioni in più variabili** Definizione di limite finito e infinito per $x \to x_0$ e per $x \to \infty$. Teoremi fondamentali sui limiti: unicità, permanenza del segno. Operazioni con i limiti, sia nel caso semplice, sia quando sono coinvolti infiniti. Forme indeterminate. Teoremi del confronto. Limiti su restrizioni. Teorema ponte. Cenno a limiti di funzioni a valori vettoriali. Limite della composizione di due funzioni. Definizione di o-piccolo e di equivalenza asintotica e loro utilizzo nel calcolo dei limiti. Definizione di continuità. Operazioni tra funzioni continue. Composizione di funzioni continue. Funzioni continue su insiemi connessi per archi: teorema dei valori intermedi. Funzioni continue su compatti: teorema di Weierstrass e teorema per stabilire quando la funzione inversa e continua.

3. **Calcolo differenziale per funzioni in più variabili** Definizioni di derivabilità e differenziabilità. Teorema che mette in relazione derivabilità, differenziabilità e continuità per le funzioni in più variabili. Proprietà elementari delle derivate e loro calcolo. Regola della catena. Teorema del differenziale totale. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwartz. Matrice Hessiana. Polinomio di Taylor (solo fino al secondo ordine) e teorema di Peano. Definizione di punti stazionari, di massimo. di minimo e di sella. Teorema che caratterizza le derivate prime nei punti di estremo regolari. Teorema che studia la natura dei punti stazionari con la matrice Hessiana. Insiemi convessi, funzioni convesse e relazione con la matrice Hessiana.

4. **Curve e integrali curvilinei** Curve continue, curve di classe C^1 e curve regolari. Definizione di curva rettificabile e calcolo della sua lunghezza nel caso sia di classe C^1. Integrali curvilinei di prima specie.

5. **Forme differenziali** Forme differenziali. Forme chiuse e forme esatte. Integrale di una forma differenziale su una curva. Teorema che caratterizza le forme esatte utilizzando il loro integrale sulle curve. Curve omotope. Insiemi semplicemente connessi. Teorema sull'integrale di una forma differenziale chiusa su curve omotope (dimostrazione fatta supponendo che le curve siano molto più regolari di quanto non siano in realtà) Teorema sulle forme differenziali chiuse definite su insiemi semplicemente connessi.

6. **Massimi e minimi vincolati** Teorema delle funzioni implicite (enunciato anche nel caso generale, ma dimostrazione nel solo caso di una funzione in 2 variabili). Teorema dell'invertibilità locale (senza dimostrazione). Massimi e minimi vincolati (enunciato anche nel caso generale, ma dimostrazione fatta solo nel caso di un solo vincolo in $\mathbf{R}^2$). Alcune considerazioni, solo in $\mathbf{R}^2$ ed $\mathbf{R}^3$, su come operare con vincoli del tipo $g \leq 0$ invece che $g = 0$

7. **Equazioni Differenziali** Alcuni esempi introduttivi: $y' = y$ e $y' = y^2$. Problema di Cauchy e teorema di esistenza e unicità locale (solo enunciato). Prolungamenti e soluzioni massimali (dimostrazione di esistenza fatta solo nel caso che valga teorema di unicità). Teorema di prolungabilità fuori dai compatti (solo enunciato). Teoremi della soprasoluzione e della sottosoluzione (enunciati anche nel caso debole ma dimostrati solo nel caso stretto). Teoremi del confronto (dimostrati riconducendoli a teoremi di soprasoluzione). Teorema di esistenza globale (solo enunciato). Esempi di studi qualitativi di problemi di Cauchy. Equazioni Differenziali a Variabili Separabili. Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine a coefficienti variabili (omogenee e non omogenee). Soluzioni di eq. lineare omogenea di ordine n sono uno spazio vettoriale di dimensione n (con dimostrazione) mentre nel caso non omogeneo sono uno spazio affine (con dimostrazione). Metodo per trovare la soluzione genreale di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti (con dimostrazione). Metodo della variazione delle costanti (senza la dimostrazione che la matrice wronskiana è non degenere). Scorciatoia per trovare una soluzione particolare di un'equazione lineare non omogenea a coefficienti costanti quando il termine noto è di forma particolare.

8. **Integrali doppi** Definizione di Integrale di Riemann per le funzioni limitate definite su un rettangolo. Proprietà elementari dell'integrale di Riemann su un rettangolo (senza dimostrazione): linearità, monotonia, proprietà della media, criteri di integrabilità. Esempio di funzione limitata su un rettangolo che non sia integrabile secondo Riemann. Teorema dell'integrale iterato su rettangoli (con dimostrazione). Misura di Peano-Jordan in $\mathbf{R}^2$, definizione e caratterizzazioni equivalenti (senza dimostrazione). Integrabilità su insiemi misurabili. Formule di riduzione su domini semplici in $\mathbf{R}^2$ (senza dimostrazione). Cambiamento di variabili per integrali doppi (senza dimostrazione). Alcuni esempi notevoli di cambiamento di variabili tra cui coordinate polari ed ellittiche.

9. **Integrali tripli** Adattamento (senza dimostrazione) di tutto ciò che è già stato visto nel caso degli integrali doppi ponendo maggior attenzione a quelle parti in cui la differenza è maggiore, in particolare: integrazione per fili e per strati, particolari cambi di variabile come coordinate sferiche, ellissoidali e toroidali. Esempio di calcolo per strati di un integrale in dimensione più alta: ipervolume della palla di $\mathbf{R}^4$.

10. **Integrali doppi impropri** Definizione di integrale improprio convergente, divergente e indeterminato. peculiarità del caso in cui la funzione integranda è a segno costante (senza dimostrazione). Conseguenze del fatto che $\int |f|$ converga (senza dimostrazione). Alcuni esempi notevoli di integrali impropri convergenti divergenti e indeterminati. Teorema del confronto (senza dimostrazione).

11. **Superfici e integrali di superficie.** Definizioni di superficie elementare, bordo, regolare, parametrizzazione, versore normale e piano tangente. Integrali di superficie: definizione e indipendenza dalla parametrizzazione. Definizione di superficie orientabile e relazione con orientazione del bordo. Superfici composte (solo in modo euristico). Definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientabile. Teorema della divergenza in $\mathbf{R}^3$ (senza dimostrazione). Teorema di Stokes in $\mathbf{R}^3$ (senza dimostrazione). Esempi su come semplificare il calcolo di un flusso utilizzando i teoremi della divergenza e/o di Stokes.