Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **1**

A.A. 2012-2013
1 Ottobre 2012
ore 11.30-13.15

1. Contenuti della Lezione

Gli argomenti trattati a lezione sono tutti contenuti nel paragrafo **10.2.2** del libro di testo, ad eccezione della definizione di insieme discreto, che è la seguente: *un insieme A si dice* **discreto** *se ogni suo punto è un punto isolato.*

Lo studente rifletta sul fatto che un insieme discreto, benché costituito solo da punti isolati, può ugualmente avere dei punti di accumulazione! (si veda ad esempio l'insieme N nel problema **1**)

Un modo semplice per verificare se ha assimilato la lezione è quello di rispondere alle **domande di verifica** che trova più sotto.

2. Lavoro proposto per casa

Consigliamo allo studente di leggere attentamente il paragrafo **10.2.2** del libro di testo, visto che spesso a lezione farò esempi diversi da quelli che il libro riporta sullo stesso argomento.

Per verificare la sua preparazione, provi a rispondere alle domande di verifica che trova più avanti: queste sono fatte in modo da coprire tutto il programma svolto a lezione.

Inoltre svolga il maggior numero possibile dei problemi proposti nel paragrafo successivo, confrontando le risposte che trova, con quelle riportate nel paragrafo alla fine della lezione.

3. Lista dei problemi

1. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1\right\},\\
B &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\},\\
C &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y\le 1\right\},\\
D &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\},\\
E &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x+y|\le 1\right\},\\
F &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x+y|> 1\right\},\\
G &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|< 1\right\},\\
H &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|\ge 1\right\},\\
I &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2> 1\right\},\\
J &= \mathbf{R}^2-\{(0,0)\},\\
K &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\ne 0,\ y\ne 0\right\},\\
L &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{Q},\ y\in\mathbf{R}\right\},\\
M &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R},\ y=\frac{1}{n},\ \text{con } n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\},\\
N &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=0,\ y=\frac{1}{n},\ \text{con } n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\},\\
O &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1, x\in\mathbf{Q}\right\},\\
P &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y\in\mathbf{Q}\right\},\\
Q &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=\frac{1}{n},\ \text{con } n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\},\\
R &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x-y=n,\ x+y=\frac{1}{m},\ \text{con } n,m\in\mathbf{Z} \text{ e } m\ne 0\right\},\\
S &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{m}{n},\ \text{con } n,m\in\mathbf{Z} \text{ e } n\ne 0\right\}.
\end{aligned}
$$

2. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei complementari degli insiemi elencati nel problema 1.

3. Di ciascuno degli insiemi elencati nel problema 1 e dei loro comlementari, dire, motivando la risposta, se sono aperti, chiusi, limitati, densi, discreti.

4. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1\right\},\\
B &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1,\ z=\frac{1}{2}\right\},\\
C &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\},\\
D &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z\le 1\right\},\\
E &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z\ge 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\},\\
F &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x+y+z|\le 1\right\},\\
G &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x+y|+|z|\le 1\right\},\\
H &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x|+|y|+|z|\le 1\right\},\\
I &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x+y|\le 1\right\},\\
J &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x|+|y|\le 1\right\},\\
K &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x|\le 1\right\},\\
L &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2> 1\right\},\\
M &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1\right\},\\
N &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 2\right\},\\
O &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+z^2\le 2\right\},\\
P &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid xyz=0\right\},\\
Q &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid xyz>0\right\},\\
R &= \mathbf{R}^3-\{(0,0,0)\},\\
S &= \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Q},\\
T &= \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{R},\\
U &= \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Z},\\
V &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{m},\ z=\frac{p}{m},\ \text{con } n,m,p\in\mathbf{Z},\ n\ne 0 \text{ e } m\ne 0\right\},\\
W &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{m},\ z=\frac{p}{n},\ \text{con } n,m,p\in\mathbf{Z},\ n\ne 0 \text{ e } m\ne 0\right\},\\
X &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{m},\ z=\frac{p}{mn},\ \text{con } n,m,p\in\mathbf{Z},\ n\ne 0 \text{ e } m\ne 0\right\}.
\end{aligned}
$$

5. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei complementari degli insiemi elencati nel problema 4.

6. Di ciascuno degli insiemi elencati nel problema 4 e dei loro comlementari, dire, motivando la risposta, se sono aperti, chiusi, limitati, densi, discreti.

7. Di ciascuna delle seguenti affermazioni, che riguardano sempre sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$, dire se è vera o falsa, motivando la risposta con l'opportuna dimostrazione o con l'opportuno controesempio.

(**a**) Un punto interno ad un insieme A è sempre di accumulazione per A

(**b**) Un punto di frontiera di un insieme A è sempre di accumulazione per A

(**c**) Un punto di accumulazione per un insieme A è sempre di frontiera di A

(**d**) Se A e B sono aperti allora anche $A\cup B$ è aperto

(**e**) Se A e B sono aperti allora anche $A\cap B$ è aperto

(**f**) L'unione di una famiglia infinita di insiemi aperti è aperta

(**g**) L'intersezione di una famiglia infinita di insiemi aperti è aperta

(**h**) La parte interna della chiusura di A è in ogni caso uguale ad A

(**i**) Se A è un insieme aperto allora la parte interna della chiusura di A è uguale ad A

4. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 1.

Dare la definizione di distanza euclidea in R^2 e in generale in R^n.

Domanda 2.

Dare la definizione di intorno di un punto in R^2 e in R^n.

Domanda 3.

Dato $A\subset\mathbf{R}^2$, dare la definizione di punto **interno**, **esterno**, **di frontiera**, **di accumulazione** e **isolato** di A.

Definire inoltre gli insiemi $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, ∂A e DA.

In generale fare lo stesso in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 4.

Dato $A \subset \mathbf{R}^2$, dire cosa significa che esso è **aperto**, **chiuso**, **denso**, **discreto**. **limitato**, **finito**.
In generale fare lo stesso in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 5.

Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza gli insiemi chiusi usando i punti di accumulazione o i punti di frontiera.

Domanda 6.

Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbf{R}^n$.

5. Risposte ai problemi proposti

Risposte di 1. Abbiamo:

$\overset{\circ}{A}=\emptyset$, $\partial A = A$, $\overline{A} = A$, $DA = A$.

$\overset{\circ}{B}=\emptyset$, $\partial B = B$, $\overline{B} = B$, $DB = B$.

$\overset{\circ}{C}=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y<1\right\}$, $\partial C=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1\right\}$, $\overline{C}=C$, $DC=C$.

$\overset{\circ}{D}=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y<1,\ x>0,\ y>0\right\}$, $\partial D = D-\overset{\circ}{D}$, $\overline{D}=D$, $DD=D$.

$\overset{\circ}{E}=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x+y|<1\right\}$, $\partial E=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x+y|=1\right\}$, $\overline{E}=E$, $DE=E$.

$\overset{\circ}{F}=F$, $\partial F=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x+y|=1\right\}$, $\overline{F}=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x+y|\geq 1\right\}$, $DF=\overline{F}$.

$\overset{\circ}{G}=G$, $\partial G=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|=1\right\}$, $\overline{G}=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|\leq 1\right\}$, $DG=\overline{G}$.

$\overset{\circ}{H}=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|>1\right\}$, $\partial H=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|=1\right\}$, $\overline{H}=H$, $DH=\overline{H}$.

$\overset{\circ}{I}=I$, $\partial I=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$, $\overline{I}=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 1\right\}$, $DI=\overline{I}$.

$\overset{\circ}{J}=J$, $\partial J=\{(0,0)\}$, $\overline{J}=\mathbf{R}^2$, $DJ=\mathbf{R}^2$.

$\overset{\circ}{K}=K$, $\partial K=\mathbf{R}^2-K$, $\overline{K}=\mathbf{R}^2$, $DK=\mathbf{R}^2$.

$\overset{\circ}{L}=\emptyset$, $\partial L=\mathbf{R}^2$, $\overline{L}=\mathbf{R}^2$, $DL=\mathbf{R}^2$.

$\overset{\circ}{M}=\emptyset$, $\partial M=M\cup\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y=0\right\}$, $\overline{M}=\partial M$, $DM=\partial M$.

$\overset{\circ}{N}=\emptyset$, $\partial N=N\cup\{(0,0)\}$, $\overline{N}=\partial N$, $DN=\{(0,0)\}$.

$\overset{\circ}{O}=\emptyset$, $\partial O=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1\right\}$, $\overline{O}=\partial O$, $DO=\partial O$.

$\overset{\circ}{P}=\emptyset$, $\partial P=\mathbf{R}^2$, $\overline{P}=\mathbf{R}^2$, $DP=\mathbf{R}^2$.

$\overset{\circ}{Q}=\emptyset$, $\partial Q=Q\cup\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=0\right\}$, $\overline{Q}=\partial Q$, $DQ=\partial Q$.

$\overset{\circ}{R}=\emptyset$, $\partial R=R\cup DR$, $\overline{R}=R\cup DR$, $DR=\left\{\left(\frac{n}{2},-\frac{n}{2}\right) \mid n\in\mathbf{Z}\right\}$.

$\overset{\circ}{S}=\emptyset$, $\partial S=S\cup DS$, $\overline{S}=S\cup DS$, $DS=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=0\right\}$.

Risposte di 7.

Le affermazioni vere sono **a**, **d**, **e**, **f**, mentre quelle false sono **b**, **c**, **g**, **h**, **i**.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 2

A.A. 2012-2013
2 Ottobre 2012
ore 9.30-11.15

6. Contenuti della lezione

Gli argomenti trattati a lezione sono quasi tutti contenuti nel paragrafi **10.3** che però si limita a citare i risultati rimandando al corrispondente argomento di Analisi 1. Dei teoremi fatti a lezione mancano solo quello del confronto e quello della restrizione, che citiamo qui di seguito:

Teorema 1.

Siano $A \subset \mathbf{R}^n$, $\overline{x}_0 \in \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per A ed $f, g, h : A \to \mathbf{R}$ funzioni tali che $f(\overline{x}) \leq g(\overline{x}) \leq h(\overline{x})$ per ogni $\overline{x} \in A$.

Allora possiamo affermare che:

(**a**) se $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = +\infty$ allora anche $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = +\infty$;

(**b**) se $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} h(\overline{x}) = -\infty$ allora anche $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = -\infty$;

(**c**) se $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} h(\overline{x}) = \ell$ allora anche $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = \ell$.

Teorema 2.

Siano $A \subset \mathbf{R}^n$, $\overline{x}_0 \in \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per A, B un sottoinsieme di A che ha ancora $\overline{x}_0$ come punto di accumulazione, $\ell \in \mathbf{R}^*$ ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione che tende ad ℓ per $\overline{x} \to \overline{x}_0$.

Allora, se indichiamo con $g(\overline{x})$ la restrizione di $f(\overline{x})$ all'insieme B, anche $g(\overline{x})$ tende a ℓ per $\overline{x} \to \overline{x}_0$.

L'utilizzo di quest'ultimo teorema è il seguente: visto che esso afferma che, se il limite c'è, esso coincide con il limite di ogni restrizione, allora per mostrare che il limite non c'è basterà trovare 2 restrizioni lungo le quali ci siano limiti diversi.

Lo studente tuttavia ricordi bene questo fatto: **non basta**, per mostrare che un limite esiste, mostrare che viene lo stesso risultato calcolandolo separatamente in tutte le direzioni.

7. Lavoro proposto per casa

Oltre a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica, lo studente provi a risolvere alcuni dei problemi proposti, tenendo comunque conto del fatto che non riuscirà a risolverli tutti. Infatti alcuni di essi verranno svolti nella lezione successiva e presi come spunto per introdurre alcune nozioni, come ad esempio quella di limite di una restrizione e quella di o-piccolo.

8. Lista dei problemi

8. Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili dire se esiste il limite per $(x,y)\to(0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarlo:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{x^8 y}{x^6+y^6},\\
f_2(x,y) &= \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2},\\
f_3(x,y) &= \frac{x^2 y}{x^2+y^2},\\
f_4(x,y) &= \frac{xy}{x^2+y^2},\\
f_5(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{x^6+y^6},\\
f_6(x,y) &= \frac{x^{100}y^{100}}{x^2+y^2},\\
f_7(x,y) &= \frac{x^{100}y^{100}}{x+y},\\
f_8(x,y) &= \frac{x^5y^2}{x^6+y^6},\\
f_9(x,y) &= \frac{xy^2}{x^2+y^4},\\
f_{10}(x,y) &= \frac{x^5y^2}{x^6+y^8},\\
f_{11}(x,y) &= \frac{x^2y^5}{x^6+y^8},\\
f_{12}(x,y) &= \frac{x^3y^4+x^5+y^5}{x^4+y^4+x^6y^3},\\
f_{13}(x,y) &= \frac{x^3y^4}{x^6+y^6},\\
f_{14}(x,y) &= \frac{x^2y^7}{x^8+y^8}.
\end{aligned}$$

9. Dire per quali valori reali non negativi di α esiste finito il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^3}{(x^{30}+y^{18})(x^{10}+y^{10})}$$

9. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 7.

Dare la definizione di limite per le funzioni in più variabili (tutti i casi: $(x,y)\to(x_0,y_0)$ oppure $(x,y)\to\infty$; $f(x,y)\to\ell$ oppure $f(x,y)\to\pm\infty$).

Domanda 8.

Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità del limite.

Domanda 9.

Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno.

Domanda 10.

Enunciare e dimostrare il teorema del limite di una restrizione.

Domanda 11.

Enunciare e dimostrare il teorema del confronto.

Domanda 12.

Enunciare e dimostrare il teorema delle operazioni sui limiti.

Domanda 13.

Enunciare tutte le possibili estensioni del teorema delle operazioni sui limiti, e dire inoltre qualdo invece l'estensione non è possibile perché si ottiene una forma indeterminata.

10. Risposte ai problemi proposti

Risposte di 8. Per $(x,y)\to(0,0)$ tendono a 0 le funzioni f_1, f_2, f_3, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{13} ed f_{14}. Invece $f_5\to+\infty$. Per le restanti funzioni, infine, il limite non esiste.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **3**

A.A. 2012-2013
5 Ottobre 2012
ore 14.00-15.45

11. Contenuti della lezione

La lezione è stata dedicata al completamento e alla generalizzazione di alcune delle nozioni introdotte nella lezione precedente. Grosso modo gli argomenti sono quelli contenuti nel capitolo 10 del libro di testo, fino al paragrafo **10.3** compreso, con l'aggiunta di alcuni argomenti del paragrafo **10.3.1** (successioni in $\mathbf{R}^n$, loro limiti e teorema ponte per funzioni in più variabili)

Per sapere i dettagli degli argomenti fatti si consiglia di leggere attentamente le domande di verifica della lezione: sono organizzate in modo da coprire esattamente il programma fatto. Tuttavia, alcuni argomenti sono stati approfonditi un pò di più di quanto non faccia il libro di testo (ad esempio il teorema sul limite della composizione di due funzioni) per cui si consiglia di guardare anche il video della lezione che è stato messo on-line.

A fine lezione sono stati svolti alcuni dei limiti proposti per casa nella lezione scorsa: quelli delle funzioni f_2 ed f_9 del problema **8**

In particolare, nel caso di f_9 si è fatto notare che tale limite non esiste, anche se esistono e valgono 0 il limite delle restrizioni di f_9 ad ogni semiretta che parte dall'origine.

Lo studente ricordi bene questo fatto: **non basta**, per mostrare che un limite esiste, mostrare che viene lo stesso risultato calcolandolo separatamente in tutte le direzioni.

Durante l'ora di esercitazione che è seguita si è continuato a svolgere alcuni esercizi.

In particolare, affrontando il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x+y|}$$

si è evidenziato il fatto che il limite per $(x,y)\to(0,0)$ può non esistere anche se il grado del numeratore è più alto di quello del denominatore: in questo caso, la causa della non esistenza del limite è legata al fatto che, in realtà, il denominatore si annulla non solo nell'origine, ma per ogni (x,y) tale che $y=-x$. Di conseguenza, si possono trovare punti arbitrariamente vicini all'origine, in cui la funzione è molto grande, ad esempio restringendosi alla curva $y=-x+x^3$.

D'altra parte, se ci si restringe agli assi, si trova facilmente che la nostra $f(x,y)$ tende a zero. Si può quindi concludere che il limite non esiste.

Infine si è cominciato a svolgere il problema **9** e ci si è trovati nella necessità di dimostrare che funzione

$$f(x,y)=\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}$$

è limitata se $\alpha+\beta=2$. Di conseguenza se ne è approfittato per introdurre il concetto di funzione positivamente omogenea di grado k, in modo da sfruttare il fatto che la nostra f è positivamente omogenea di grado 0: grazie a ciò, infatti, dalla limitatezza di f sulla circonferenza di raggio 1 segue la sua limitatezza su tutto $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$.

12. Lavoro proposto per casa

Oltre a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica, lo studente dovrebbe ora essere in grado di risolvere la maggior parte dei problemi proposti a questa lezione ed alla precedente.

13. Lista dei problemi

10. Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili dire se esiste il limite per $(x,y)\to(0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarlo:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4},\\
f_2(x,y) &= \frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^8+y^8+x^9+y^9},\\
f_3(x,y) &= \frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^8+y^8+x^9-y^9},\\
f_4(x,y) &= \frac{2x^2+3y^2+x^y}{x^2+8y^2+x^4-y^4},\\
f_5(x,y) &= \frac{1}{x^6+y^6}\ln\left(\frac{x^6+y^6+x^6y^7}{x^6+y^6}\right),\\
f_6(x,y) &= \frac{x^4y^6}{\ln\cos(x^2+y^6)}.\\
f_7(x,y) &= \frac{\ln(1+x^3)+\ln(1+y^3)}{\ln(1+x^4+y^4)}.
\end{aligned}$$

11. Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili dire se esiste il limite per $(x,y) \to (0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarlo:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{\sin xy}{xy}, \\
f_2(x,y) &= \frac{\sin xy}{xy + x^2y^2}, \\
f_3(x,y) &= \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}, \\
f_4(x,y) &= \frac{\ln\cos(x^2+y^4)}{x^2+y^4}, \\
f_5(x,y) &= \frac{\ln\cos(xy)}{x^2+y^4}, \\
f_6(x,y) &= \frac{\ln\cos(x^2+y^2)}{xy}, \\
f_7(x,y) &= \frac{e^{x^2+y^6} - 1 + x^3}{x^2+y^6}, \\
f_8(x,y) &= \frac{e^{x^2-y^6} - 1}{x^2-y^6}, \\
f_9(x,y) &= \frac{e^{x^2-y^6} - 1 + x^3}{x^2-y^6}, \\
f_{10}(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}, \\
f_{11}(x,y) &= \frac{|xy|^{|xy|} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

12. Calcolare (o dimostrare che non esiste) il limite

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{\sin xy}{xy + x^2y^2}$$

prima sul suo dominio naturale Ω poi restringendosi a $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y < x+2,\ x < 0\}$.

13. Calcolare (o dimostrare che non esiste) il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y$$

sul suo dominio naturale $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$.
Calcolarlo poi sulle restrizioni $K_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| < x\}$ e $K_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^{2012} < x\}$.

14. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 14.

Definire il concetto di **intorno di** ∞ in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 15.

Dare la definizione generale di limite per le funzioni in più variabili, sia nel caso di funzioni a valori scalari che nel caso di funzioni a valori vettoriali.

Domanda 16.

Enunciare il teorema che lega il limite di una funzione a valori vettoriali al limite delle sue componenti.

Domanda 17.

Dire cosa significa che una funzione in più variabili è continua in un punto $\overline{x}_0$.

Domanda 18.

Dimostrare che i polinomi in più variabili sono funzioni continue.

Domanda 19.

Enunciare il teorema sul limite della composizione di due funzioni in più variabili.

Domanda 20.

Dare la definizione di successione a valori in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 21.

Dare la definizione di limite per una successione a valori in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 22.

Enunciare il teorema ponte per le funzioni in più variabili.

15. Risposte di alcuni problemi proposti

Risposte di 10. Per $(x,y) \to (0,0)$, tendono a 0 le funzioni f_5 ed f_6, tendono a $+\infty$ le funzioni f_2 ed f_3, mentre non hanno limite le funzioni f_1, f_4 ed f_7.

Risposte di 11. Per $(x,y) \to (0,0)$, tendono a 0 le funzioni f_4, f_5 ed f_{11}, tendono a 1 le funzioni f_1, f_2, f_7 ed f_8, tende a $-\infty$ la funzione f_{10} mentre non hanno limite le funzioni f_3, f_6 ed f_9.

Risposta di 12. Il limite non esiste se si prende f definita su tutto Ω. Se invece ci si restringe a K il limite è $+\infty$.

Risposta di 13. Il limite non esiste se si prende f definita su tutto Ω. Se invece ci si restringe a K_1 o a K_2 il limite è 1.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 4

A.A. 2012-2013
8 Ottobre 2011
ore 11.30-13.15

16. Contenuti della lezione

Anche questa lezione è stata dedicata al calcolo di limiti per funzioni in 2 variabili.
Se ne è approfittato per introdurre la definizione di o-piccolo per funzioni in più variabili.
Per prima cosa, procedendo in modo analogo a quanto fatto per le funzioni in una sola variabile, si è introdotta la seguente:

Definizione 1.

Date due funzioni $f(\overline{x})$ e $g(\overline{x})$, entrambe definite su un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ avente $\overline{x}_0$ come punto di accumulazione ed entrambe infinitesime (o infinite) per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, con $g(\overline{x})$ definitivamente diversa da 0 per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, diremo che

$$f(\overline{x}) = o\left(g(\overline{x})\right) \qquad \text{per } \overline{x} \to \overline{x}_0,$$

se

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = 0$$

Tuttavia, tale definizione (che in una sola variabile funziona benissimo) presenta qualche controindicazione per le funzioni in più variabili, dove ci sono funzioni anche di tipo polinomiale, non identicamente nulle, che però si annullano su insiemi che si accumulano nell'origine (ad esempio la semplicissima funzione $f(x, y) = xy$).
In base alla definizione **1**, infatti, non è detto (come invece ci aspetterebbe che debba essere) che una funzione $f(x, y)$ che sia $o\left(x^2y^2\right)$ sia anche $o\left(x^2 + y^2\right)$, perchè, il fatto di essere $o\left(x^2y^2\right)$, non da alcun controllo sul comportamento di $f(x, y)$ sugli assi, dove il quoziente $\dfrac{f(x,y)}{x^2y^2}$ non è definito.
Per le funzioni in una sola variabile il problema non era così grave, in quanto gli infinitesimi campione del tipo x^α sono sempre diversi da 0 per $x \neq 0$.
Per le funzioni in più variabili invece, è preferibile adottare la seguente definizione:

Definizione 2.

Date due funzioni $f(\overline{x})$ e $g(\overline{x})$, entrambe definite su un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ avente $\overline{x}_0$ come punto di accumulazione ed entrambe infinitesime (o infinite) per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, diremo che

$$f(\overline{x}) = o\left(g(\overline{x})\right) \qquad \text{per } \overline{x} \to \overline{x}_0,$$

se esiste una funzione $h(\overline{x})$ definita su A e infinitesima per $\overline{x} \to \overline{x}_0$ tale che

$$f(\overline{x}) = h(\overline{x})g(\overline{x}).$$

Si noti che nei casi *buoni*, cioè quando $g(\overline{x}) \neq 0$ definitivamente per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, la definizione **2** coincide con la definizione **1**.

Una volta definito il concetto di o-piccolo, il modo di utilizzarlo per il calcolo dei limiti è descritto nel seguente:

Teorema 3.

Siano $A \subset \mathbf{R}^n$ e $\overline{x}_0 \in \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per A. Siano inoltre $F, G, f, g : A \to \mathbf{R}$ tali che, per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, si abbia: $f(\overline{x}) = o\left(F(\overline{x})\right)$ eb) $g(\overline{x}) = o\left(G(\overline{x})\right)$.
Allora

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \frac{F(\overline{x}) + f(\overline{x})}{G(\overline{x}) + g(\overline{x})} = \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \frac{F(\overline{x})}{G(\overline{x})}.$$

A fine lezione si è invece richiamato agli studenti la possibilità di calcolare i limiti passando in coordinate polari nel caso che la funzione sia omogenea, sottolineando però il fatto che il limite che si ottiene va calcolato per $\rho \to 0^+$ ma **uniformemente in** θ, non solo per ogni fissato θ. Nella pratica, quando $f(x, y)$ è una funzione omogenea, il fatto che il passaggio al limite sia fatto uniformemente in θ equivale a dire che, una volta scritto:

$$f(x, y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = G(\rho) \cdot H(\theta)$$

la funzione $H(\theta)$ è limitata e la funzione $G(\rho)$ tende a 0 per $\rho \to 0^+$.

17. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica e svolgendo i problemi che gli proponiamo.

18. Lista dei problemi

14. Detta $F(x, y) = x^{32} + y^{24}$, dire quale delle seguenti funzioni è $o\left(F(x, y)\right)$ per $(x, y) \to (0, 0)$:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^{28}, \\ f_2(x,y) &= y^{28}, \\ f_3(x,y) &= x^{16}y^{12}, \\ f_4(x,y) &= x^{18}y^{10}, \\ f_5(x,y) &= x^{14}y^{14}, \\ f_6(x,y) &= x^{34} + y^{26}. \\ f_7(x,y) &= x^{34} - y^{26}. \end{aligned}$$

15. Detta $F(x, y) = x^{32} + y^{24}$ (come nel problema 14), dire per quali valori del parametro α (ed eventualmente anche del parametro β) le funzioni sotto elencate sono $o\left(F(x, y)\right)$ per $(x, y) \to (0, 0)$:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^{\alpha}y^{12}, \\ f_2(x,y) &= x^{16}y^{\alpha}, \\ f_3(x,y) &= x^{\alpha}y^{11}, \\ f_4(x,y) &= x^{\alpha}y^{13}, \\ f_5(x,y) &= x^{15}y^{\alpha}, \\ f_6(x,y) &= x^{17}y^{\alpha}. \\ f_7(x,y) &= x^{\alpha}y^{\beta}. \end{aligned}$$

16. In generale, presa $F(x, y) = |x|^p + |y|^q$, dove p e q sono due fissate costanti positive, dire per quali valori dei parametri positivi α e β la funzione $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ è $o\left(F(x, y)\right)$ per $(x, y) \to (0, 0)$.

17. Dire come sarebbero state le risposte ai problemi **14** e **15** se si fosse preso $F(x, y) = x^{32} - y^{24}$.

18. Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili dire se esiste il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{x^2 - 2|xy| + |y|}{x^2 + |y|}, \\ f_2(x,y) &= \frac{\sqrt{|x| + |y|} - \sqrt{|xy|}}{x^2 + |y| - \sin xy}, \\ f_3(x,y) &= \frac{x\sqrt[3]{x} + y\sqrt[3]{y}}{x^2 + |y| + y(x+y)}, \\ f_4(x,y) &= \frac{x\sin(xy^2)}{x^2 - xy^3 + y^4}, \\ f_5(x,y) &= \frac{x\sin(xy^2)}{x^2 - xy^2 + y^4}, \\ f_6(x,y) &= \frac{\sin(xy^2)}{x^2 - xy^2 + y^4}, \\ f_7(x,y) &= \frac{x\sin(xy^2)}{x^2 - 2xy^2 + y^4}, \\ f_8(x,y) &= \frac{x^8 + y^8}{x^2y^2 + x^{16} + y^{16}}. \end{aligned}$$

19. Per quali valori di α esiste finito il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 + y^6}{x^4 + y^4 - |xy|^\alpha}.$$

20. Provare a passare in coordinate polari per calcolare il limiti di f_6 ed f_7 del problema **8** e spiegare cosa succede di diverso nei 2 casi.

19. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 23.

Dire cosa significa che f è o-piccolo di g nel caso di funzioni in più variabili. Spiegare inoltre perchè la definizione è formalmente un po' diversa da quella data per le funzioni in una sola variabile.

Domanda 24.

Enunciare il teorema che permette di semplificare il calcolo dei limiti di funzioni in più variabili, grazie al concetto di o-piccolo.

Domanda 25.

Spiegare cosa significa la locuzione: *"limite per $\rho \to 0^+$ uniformemente in θ"*.

Domanda 26.

Dimostrare che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ vale la disuguaglianza:

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Domanda 27.

Dimostrare che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, comunque si scelgano α e β positivi, vale la disuguaglianza:

$$\frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{|x|^{\alpha+\beta}+|y|^{\alpha+\beta}} \leq 1.$$

20. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 5

A.A. 2012-2013
9 Ottobre 2012
ore 9.30-11.15

21. Contenuti della lezione

Nella prima parte della lezione sono state introdotte quel minimo di nozioni sulle successioni a valori in $\mathbf{R}^n$, che sono necessarie a enunciare e dimostrare i principali teoremi relativi alle funzioni continue su insiemi compatti.
I teoremi sulle funzioni continue sono invece stati trattati nella seconda parte della lezione.
Tutti gli argomenti trattati, tranne la versione *multidimensionale* del teorema dei valori intermedi, sono contenuti nel capitolo **10** del libro di testo, capitolo che, con questa lezione, possiamo considerare concluso.
Visto che, spesso, nel testo non sono presenti le dimostrazioni riportiamo qui di seguito le dimostrazioni fatte a lezione:

Teorema 4.

Un insieme A contenuto in $\mathbf{R}^n$ è chiuso se e solo se, comunque si prenda una successione a valori in A, se essa converge allora il suo limite è ancora contenuto in A.

Teorema 5.

Un insieme A contenuto in $\mathbf{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione del Teorema 5.

Per prima cosa mostriamo che se un insieme A non è limitato, allora non può essere compatto.
Infatti, dal fatto che non è limitato segue che, per quanto sia grande il numero naturale n, la palla centrata nell'origine e di raggio n non può contenere tutto l'insieme.
Ciò sognifica che, per ogni $n \in \mathbf{N}$ è possibile prendere un punto, che indicheremo con $\overline{a}_n$, che appartiene ad A ma non alla palla di raggio n centrata nell'origine.
Per come è definita, la successione $(\overline{a}_n)$ tende (ovviamente) a ∞. Di conseguenza tendono ad ∞ anche tutte le sue sottosuccessioni.
Ciò significa che $(\overline{a}_n)$ è una successione a valori in A dalla quale non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente ad un punto di A.
Quindi A non può essere compatto.
Mostriamo ora che, anche quando un insieme A non è chiuso, non può essere compatto.
Infatti, se A non è chiuso, allora esiste un punto $\overline{x}_0$ che è di accumulazione per A, ma che non appartiene ad A. Basterà quindi prendere una successione $(\overline{a}_n)$ di punti di A che tende ad $\overline{x}_0$ ed essa sarà proprio una successione a valori in A dalla quale non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente ad un punto di A, visto che tutte le sottosuccessioni di $(\overline{a}_n)$ continuano a tendere ad $\overline{x}_0$, che non appartiene ad A.
Quindi, anche quando A non è chiuso, non può essere compatto.
Possiamo quindi concludere che se un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ è compatto, allora è necessariamente chiuso e limitato.
Mostriamo ora che vale anche il viceversa, cioè che se $A \subset \mathbf{R}^n$ è chiuso e limitato, allora è necessariamente compatto.
Infatti, comunque si prenda una successione $(\overline{a}_n)$ a valori in A, se la sua immagine è un insieme finito di punti, allora essa ha una sottosuccessione costante, che quindi è (banalmente) convergente ad un punto di A. Se invece l'immagine di $(\overline{a}_n)$ è un insieme infinito, grazie alla limitatezza di A e al teorema di Bolzano-Weierstrass, possiamo affermare che i punti dell'immagine di $(\overline{a}_n)$ hanno un punto di accumulazione $\overline{x}_0$, quindi è possibile estrarre da $(\overline{a}_n)$ una sottosuccessione convergente ad $\overline{x}_0$. Inoltre, essendo A un insieme chiuso, si ha che $\overline{x}_0 \in A$.
Ciò dimostra che, comunque si sia presa una successione $(\overline{a}_n)$ a valori in $A \subset \mathbf{R}^n$, se A è chiuso e limitato allora è sempre possibile estrarre da A una sottosuccessione convergente ad un punto che sta ancora dentro A. Ciò significa che A è compatto.
Quindi abbiamo dimostrato che, se A è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^n$, allora è necessariamente compatto.
Ciò completa la dimostrazione.

Teorema 6. (Weierstrass)

Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ un insieme compatto e sia $f : K \to \mathbf{R}^m$ una funzione continua. Allora anche $f(K)$ è un insieme compatto.

Dimostrazione del Teorema 6.

Vogliamo mostrare che $f(K)$ è compatto, cioè che se prendiamo una qualsiasi successione $\left(\overline{b}_n\right)$ a valori in $f(K)$ è sempre possibile estrarre da essa una sottosuccessione convergente ad un punto di $f(K)$.
A tale scopo cominciamo con l'osservare che, comunque si sia presa $\left(\overline{b}_n\right)$ in $f(K)$, si può sempre prendere $(\overline{a}_n)$ in K tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si abbia

$$f\left(\overline{a}_n\right) = \left(\overline{b}_n\right). \tag{1}$$

Ma poiché K è compatto, è possibile estrarre una sottosuccessione $(\overline{a}_{n_k})$ di $(\overline{a}_n)$ tale che, per $k \to +\infty$ si abbia

$$\overline{a}_{n_k} \to \overline{\ell} \in K. \tag{2}$$

Se ora indichiamo con $\left(\overline{b}_{n_k}\right)$ la sottosuccessione di $\left(\overline{b}_n\right)$, che è immagine di $(\overline{a}_{n_k})$ tramite f, si ha:

$$\lim_{k\to+\infty} \overline{b}_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} f\left(\overline{a}_{n_k}\right) = f\left(\overline{\ell}\right) \in f(K), \tag{3}$$

dove nella seconda uguaglianza si è ricordato che vale (2), che f è continua e si è applicato il teorema ponte.
Siamo quindi riusciti a mostrare che, comunque si fosse scelta $\left(\overline{b}_n\right)$ in K è sempre possibile estrarre da essa la sottosuccessione $\left(\overline{b}_{n_k}\right)$ che converge ancora ad un punto di $f(K)$.
Ciò dimostra che $f(K)$ è compatto.

Teorema 7.

Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ un insieme connesso per archi e sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ una funzione continua. Allora anche $f(A)$ è un insieme connesso per archi.

Dimostrazione del Teorema 7.

Vogliamo mostrare che $f(A)$ è connesso per archi, cioè che se prendiamo due punti qualsiasi $\overline{y}_1$ e $\overline{y}_2$ appartenenti ad $f(A)$, allora è sempre possibile trovare una curva $\varphi : [a, b] \to f(A)$ continua e tale che $\varphi(a) = \overline{y}_1$ e $\varphi(b) = \overline{y}_2$.
A tale scopo osserviamo che, comunque siano scelti $\overline{y}_1$ e $\overline{y}_2$ in $f(A)$, possiamo sempre prendere $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ in A tali che

$$f\left(\overline{x}_1\right) = \overline{y}_1 \qquad \text{e} \qquad f\left(\overline{x}_2\right) = \overline{y}_2.$$

Ma poiché, per ipotesi, A è connesso per archi, sappiamo che è possibile trovare una curva $\psi : [a, b] \to A$ continua e tale che $\psi(a) = \overline{x}_1$ e $\psi(b) = \overline{x}_2$.
Di conseguenza, essendo f continua, se definiamo $\varphi = f \circ \psi$, otterremo che φ ha proprio le proprietà richieste, cioè è continua (in quanto composizione di funzioni continue), ha il sostegno contenuto in $f(A)$ e manda a in $\overline{y}_1$ e b in $\overline{y}_2$.
Ciò completa la dimostrazione che $f(A)$ è connesso per archi.

Lo studente non trascuri di leggere anche quei paragrafi del capitolo **10** del libro di testo che non sono stati esplicitamente citati: essi contengono esempi e argomentazioni assimilabili a quelle sviluppate nelle lezioni dedicate alla soluzione dei problemi, quindi lo studente dovrebbe ormai essere perfettamente in grado di comprenderli.

22. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Per quanto riguarda i problemi può provare a cimentarsi con quelli proposti nel paragrafo seguente.

23. Lista dei problemi

21. Dire se sono compatti gli insiemi elencati nei problemi **1** e **4**.

22. Dire se esistono i seguenti limiti di successioni in $\mathbf{R}^2$ e, in caso affermativo, calcolarli:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\cos n, \frac{1}{n}\sin n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}, \sin n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos n, \sin n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(n, \sin n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\cos n, n\sin n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cos n, \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\sin n\right).$$

23. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2y + xy^2 + y^5 & \text{per } y \le 1 \\ x^2 + 4xy^2 - \dfrac{1}{y} & \text{per } \ y > 1. \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x^4 - y^4 & \text{per } x^2 + y^2 \ge 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}xy & \text{per } \ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \ln(1+xy) & \text{per } xy \ge 0 \\ \dfrac{y}{x} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

24. Sia data la funzione $f(t) = t\sqrt{t}$, definita per ogni $t \in A = [0, +\infty)$.
La funzione

$$F(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

è definita per ogni $(x,y) \in A \times A$, con $x \neq y$.
Dire se F è estendibile con continuità a tutto l' insieme $A \times A$ e in caso affermativo determinare il suo valore nei punti di $A \times A$ tali che $x = y$.

25. Come il problema **24**, ma con $f(t) = \ln t$ e prendendo come insieme A il dominio di $f(t)$.

26. Svolgere il problema **25** anche prendendo al posto di $f(t)$ ciascuna delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin t, \\ f_2(t) &= t^2, \\ f_3(t) &= \sqrt{t}, \\ f_4(t) &= \sqrt[3]{t}, \\ f_5(t) &= \begin{cases} t^2 \sin\dfrac{1}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } \ t = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

24. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 28.

Dare la definizione di successione a valori in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 29.

Dare la definizione di limite per una successione a valori in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 30.

Spiegare che relazione c'è tra il limite di una successione in $\mathbf{R}^n$ e il limite delle sue componenti.

Domanda 31.

Dare la definizione di successione di Cauchy a valori in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 32.

Enunciare il teorema che caratterizza le successioni di Cauchy in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 33.

Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza in $\mathbf{R}^n$ gli insiemi chiusi utilizzando le successioni.

Domanda 34.

Dare, in $\mathbf{R}^n$, la definizione di insieme compatto.

Domanda 35.

Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza gli insiemi compatti in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 36.

Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass per le funzioni in più variabili.

Domanda 37.

Dare delle condizioni sufficienti affinché l'inversa di una funzione (in più variabili) continua sia continua.

Domanda 38.

Dare la definizione di curva continua e dire cos'è il suo sostegno.

Domanda 39.

Dare la definizione di insieme connesso per archi, in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 40.

Enunciare e dimostrare il teorema che generalizza alle funzioni in più variabili il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue.

Domanda 41.

Dati $\Omega \in \mathbf{R}^n$ e $f : \Omega \mapsto \mathbf{R}^m$, dire cosa significa che f è uniformemente continua e dare un esempio sia di una funzione uniformemente continua sia di funzione che non lo sia.

Domanda 42.

Dati $\Omega \in \mathbf{R}^n$ e $f : \Omega \mapsto \mathbf{R}^m$, dire cosa significa che f è lipschitziana continua e dare un esempio sia di una funzione lipschitziana sia di funzione che non lo sia.

Domanda 43.

Dire, motivando la risposta, che relazione c'è trà i concetti di funzione lipschitziana e di funzione uniformemente continua.

Domanda 44.

Enunciare e dimostrare il teorema di Heine-Cantor.

25. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 6

A.A. 2012-2013
12 Ottobre 2012
ore 14.00-15.45

26. Contenuti della lezione

In questa lezione si è iniziata la parte del calcolo differenziale per le funzioni in più variabili.

Gli argomenti svolti sono quelli dei paragrafi **11.1** e **11.2** con l'eccezione del teorema del differenziale totale e delle sue conseguenze, che verrà trattato nella lezione successiva.

Alla fine della lezione sono stati svolti alcuni problemi assegnati nella lezione precedente, relativi allo studio della regolarità di una funzione in più variabili.

In particolare è stata studiata la regolarità della funzione f_3 del problema **27**, allo scopo di evidenziare che la formula per calcolare la derivata direzionale utilizzando il gradiente, può dare un risultato errato se la funzione non è differenziabile.

27. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

Per quanto riguarda lo svolgimento dei problemi proposti, tenga presente che i più semplici sono i problemi **29**, **30** e **31**, che richiedono solo di saper svolgere dei calcoli, mentre il più complesso è il **28**, che comunque è il tipico problema che potrà essere proposto nello scritto d'esame su questo argomento.

28. Lista dei problemi

27. Per ciascuna delle seguenti funzioni studiare nell'origine continuità, derivabilità e differenziabilità. Dire inoltre se è vero che per ogni versore ν si ha $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0,0) =< \nabla f(0,0), \nu >$.

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

28. Studiare la differenziabilità della funzioni definite nei problemi **24**, **25** e **26**.

29. Calcolare le derivate parziali fuori dall'origine per le funzioni dell'esercizio **27**.

30. Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili calcolare, quando è possibile, le due derivate parziali. Calcolare inoltre, quando è possibile, la derivata direzionale nel punto $(1,1)$ nella direzione $\nu = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e il piano tangente nel punto $(1,1)$.

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x^2y^5 + x^5 + y^7, \\
f_2(x,y) &= \ln(xy), \\
f_3(x,y) &=, e^{xy} \\
f_4(x,y) &= \sin(x^2 - y^2), \\
f_5(x,y) &= (xy)^2, \\
f_6(x,y) &= e^{\arctan\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}, \\
f_7(x,y) &= x^y + y^x.
\end{aligned}$$

31. Per le funzioni seguenti funzioni di 3 variabili calcolare, quando è possibile, le tre derivate parziali. Calcolare inoltre, quando è possibile, la derivata direzionale nel punto $(1,1,1)$ nella direzione $\nu = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e il piano tangente nel punto $(1,1,1)$.

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z) &= x^2y^4z + x^2z^3 + yz^4, \\
f_2(x,y,z) &= \ln(xyz), \\
f_3(x,y,z) &=, e^{x^2+y^2+z^2} \\
f_4(x,y,z) &= \sqrt{xyz}, \\
f_5(x,y,z) &= (xyz)^2, \\
f_6(x,y,z) &= x^y + y^z + z^x, \\
f_7(x,y,z) &= x^{y^z}.
\end{aligned}$$

29. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 45.

Dare la definizione di derivata parziale e derivata direzionale per una funzione in più variabili, a valori scalari.

Domanda 46.

Mostrare, mediante l'opportuno controesempio, che la derivabilità di una funzione in più variabili in un punto, anche in ogni direzione, non basta a garantire la continuità della funzione in quel punto.

Domanda 47.

Dare la definizione di differenziabilità e di piano tangente per le funzioni in più variabili a valori scalari.

Domanda 48.

Enunciare e dimostrare il teorema che lega la differenziabilità alla continuità ed alla derivabilità in ogni direzione.

30. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **7**

A.A. 2012-2013
15 Ottobre 2012
ore 11.30-13.15

31. Contenuti della lezione

La lezione è stata dedicata alla parte non ancora trattata del paragrafo **11.2** e al paragrafo **11.3** del libro di testo, aggiungendo però anche le dimostrazioni del teorema del differenziale totale e di quella del teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione che, non essendo riportate nel libro di testo, riportiamo qui di seguito per completezza.
Per una maggior semplicità enunciamo e dimostriamo tali teoremi per le funzioni in 2 variabili. La dimostrazione nel caso di n variabili è del tutto analoga, anche se più pesante dal punto di vista delle notazioni.

Teorema 8.

Siano $A \subset \mathbf{R}^2$, (x_0, y_0) un punto interno ad A ed f una funzione scalare definita su A. Si supponga inoltre che esista un intorno $\mathcal{U}$ di (x_0, y_0) tale che $f_x(x,y)$ ed $f_y(x,y)$ esistano per ogni $(x,y) \in \mathcal{U}$ e si supponga infine che f_x ed f_y siano continue in (x_0, y_0).
Allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

Dimostrazione del Teorema 8.

Vogliamo dimostrare che si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0. \tag{4}$$

A tale scopo osserviamo che se $\mathcal{U}$ è un intorno sferico di (x_0, y_0), se (x,y) sta in $\mathcal{U}$, allora stanno in $\mathcal{U}$ anche (x_0, y) e i 2 segmenti che lo congiungono con (x_0, y_0) e (x, y).
Di conseguenza possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
f(x,y) - f(x_0,y_0) &= f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = \\
&= f_x(\xi, y)(x-x_0) + f_y(x_0,\eta)(y-y_0),
\end{aligned} \tag{5}$$

per opportuni ξ e η con ξ compreso tra x e x_0 ed η compreso tra y e y_0.
Questo perché si è applicato il teorema di Lagrange alle funzioni $f(x,y)$ e $f(x_0,y)$, la prima vista come funzione della sola variabile x per ogni fissato y, la seconda vista come funzione della variabile y.
Grazie a (5) si ottiene

(6)
$$\begin{aligned}
&f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = \\
&\quad = f_x(\xi,y)(x-x_0) + f_y(x_0,\eta)(y-y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0), \\
&\quad = \left(f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)\right)(x-x_0) + \left(f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)\right)(y-y_0).
\end{aligned}$$

Di conseguenza si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \\
&= \frac{\left(f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)\right)(x-x_0) + \left(f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)\right)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \\
&= \left(f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)\right) \cdot \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} + \\
&\qquad + \left(f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)\right) \cdot \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Notiamo però che sia $\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$ che $\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$ sono limitate perchè il mumeratore ha valore assoluto minore del denominatore.
Inoltre dalla continuità di f_x e f_y nel punto (x_0, y_0) segue che sia $f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0)$ che $f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)$ sono infinitesime per $(x,y) \to (x_0,y_0)$
Combinando questi due fatti con la (7), possiamo affermare che la (4) è vera.
Ciò completa la dimostrazione.

Lemma 9.

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$ ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile 2 volte. Siano inoltre (x_0, y_0) e (x_1, y_1) due punti di A tali che tutto il rettangolo $\mathcal{Q}$ di vertici (x_0, y_0), (x_0, y_1), (x_1, y_1) e (x_1, y_0) sia contenuto in A.

Allora esistono due punti (ξ,η) e (λ,μ), interni a $\mathcal{Q}$, tali che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) = \frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)-f(x_0,y_1)+f(x_0,y_0)}{(x_1-x_0)(y_1-y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\lambda,\mu).$$

`Dimostrazione del Lemma 9.`

Per cominciare mostriamo che esiste un punto (ξ,η), interno a $\mathcal{Q}$, tale che

$$\frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)-f(x_0,y_1)+f(x_0,y_0)}{(x_1-x_0)(y_1-y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta). \tag{8}$$

A tale scopo basta osservare che:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)-f(x_0,y_1)+f(x_0,y_0)}{(x_1-x_0)(y_1-y_0)} = \\
&= \frac{1}{(y_1-y_0)} \cdot \frac{(f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0))-(f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0))}{(x_1-x_0)} = \\
&= \frac{1}{(y_1-y_0)} \cdot \frac{G(x_1)-G(x_0)}{(x_1-x_0)},
\end{aligned} \tag{9}$$

dove abbiamo usato la notazione:

$$G(x) = f(x,y_1) - f(x,y_0).$$

Si noti che, per x compreso tra x_0 e x_1 (estremi inclusi), $G(x)$ è continua e derivabile, in quanto tale è la funzione $f(x,y)$ vista come funzione della variabile x per ogni fissato y.
Inoltre

$$G'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0).$$

Di conseguenza, se applichiamo il teorema di lagrange alla funzione $G(x)$ sull'intervallo di estremi x_0 e x_1, otteniamo che esiste ξ, strettamente compreso tra x_0 e x_1, tale che

$$\frac{G(x_1)-G(x_0)}{(x_1-x_0)} = G'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0).$$

Quindi la (9) diventa

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)-f(x_0,y_1)+f(x_0,y_0)}{(x_1-x_0)(y_1-y_0)} \\
&= \frac{1}{(y_1-y_0)} G'(\xi) = \\
&= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0)}{(y_1-y_0)} = \\
&= \frac{H(y_1)-H(y_0)}{(y_1-y_0)}
\end{aligned} \tag{10}$$

dove abbiamo usato la notazione:

$$H(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y).$$

Si noti che, per y compreso tra y_0 e y_1 (estremi inclusi), $H(y)$ è continua e derivabile, in quanto tale è la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ vista come funzione della variabile y per ogni fissato x.
Inoltre

$$H'(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,y).$$

Di conseguenza, se applichiamo il teorema di lagrange alla funzione $H(y)$ sull'intervallo di estremi y_0 e y_1, otteniamo che esiste η, strettamente compreso tra y_0 e y_1, tale che

$$\frac{H(y_1)-H(y_0)}{(y_1-y_0)} = H'(\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta). \tag{11}$$

Sostituendo la (11) nella (10) si ottiene dunque la (8).
In modo del tutto analogo si può dimostrare che esiste un punto (λ,μ), interno a $\mathcal{Q}$, tale che

$$\frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)-f(x_0,y_1)+f(x_0,y_0)}{(x_1-x_0)(y_1-y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\lambda,\mu),$$

completando così la dimostrazione.

`Teorema 10.`

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, (x_0,y_0) un punto di A ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile 2 volte su A tale che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ siano continue in (x_0,y_0).
Allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$.

`Dimostrazione del Teorema 10.`

Osserviamo che se $|t|$ è sufficientemente piccolo, tutto il quadrato $\mathcal{Q}$ di vertici (x_0,y_0), (x_0+t,y_0), (x_0,y_0+t) e (x_0+t,y_0+t) è contenuto in A.
Di conseguenza, applicando il Lemma 9, otteniamo che esistono due punti (ξ,η) e (λ,μ), interni a $\mathcal{Q}$, tali che
(12)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) = \frac{f(x_0+t,y_0+t)-f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0+t)+f(x_0,y_0)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\lambda,\mu)$$

Si noti che, se $t \to 0$, allora (ξ,η) e (λ,μ) tendono a (x_0,y_0).

Di conseguenza, dalla prima delle due uguaglianze di (12) e dal fatto che $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ è continua in (x_0,y_0) segue che

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0+t)-f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0+t)+f(x_0,y_0)}{t^2} = \\
&= \lim_{(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0).
\end{aligned} \tag{13}$$

In modo del tutto analogo, dalla seconda delle due uguaglianze di (12) e dal fatto che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ è continua in (x_0,y_0) segue che

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0+t)-f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0+t)+f(x_0,y_0)}{t^2} = \\
&= \lim_{(\lambda,\mu)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\lambda,\mu) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0).
\end{aligned} \tag{14}$$

Di conseguenza, per l'unicità del limite, da (13) e (14) segue che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0),$$

che è quanto volevamo dimostrare.

32. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica e svolga i problemi proposti. Tenga presente che il problema **36** è più difficile.

33. Lista dei problemi

`32.` Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili calcolare la matrice Hessiana nel generico punto (x,y). Calcolarne poi $\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}$ nel punto $(1,-1)$, dove $\nu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^3y^4 + xy^8 + y^5, \\
g(x,y) &= e^{x^3y^2}, \\
h(x,y) &= x^y.
\end{aligned}$$

`33.` Per le funzioni seguenti funzioni di 3 variabili calcolare la matrice Hessiana nel generico punto (x,y,z). Calcolarne poi $\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}$ nel punto $(1,1,1)$, dove $\nu = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^4 + y^4 + z^4 + xyz, \\
g(x,y,z) &= \arctan(x^2+y^2+z^2), \\
h(x,y,z) &= x^{yz}.
\end{aligned}$$

`34.` Per le funzioni seguenti funzioni di 4 variabili calcolare la matrice Hessiana nel generico punto (x,y,z,w). Calcolarne poi $\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}$ nel punto $(1,1,-1,-1)$, dove $\nu = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= x^3yz + xyw^4 + zw, \\
g(x,y,z,w) &= \ln(xe^z + ye^w), \\
h(x,y,z,w) &= (xy)^{zw}.
\end{aligned}$$

`35.` Dire, motivando la risposta, se può esistere una funzione di due variabili f, di classe C^2, tale che $f_x(x,y) = x^2e^y$ e $f_y(x,y) = y^2e^x$.

`36.` Provare a generalizzare il lemma **9** alle funzioni di 3 variabili.

34. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

`Domanda 49.`

Enunciare e dimostrare il teorema del differenziale totale.

`Domanda 50.`

Dare la definizione di funzione di classe C^1.

Domanda 51.

Dire, per le funzioni in più variabili, che relazione c'è tra l'essere continue, derivabili, differenziabili e di classe C^1, motivando le risposte con le opportune dimostrazioni o con gli opportuni controesempi.

Domanda 52.

Dire cosa sono le derivate parziali di ordine k di una funzione in più variabili.

Domanda 53.

Dire cosa significa che una funzione in più variabili è di classe C^k.

Domanda 54.

Dire cos'è la matrice Hessiana e spiegare, motivando la risposta, come si può usarla per calcolare $\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)$, dove $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e ν e ω sono versori di $\mathbf{R}^n$.

Domanda 55.

Enunciare e dimostrare il teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione.

35. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 8

A.A. 2012-2013
16 Ottobre 2012
ore 11.30-13.15

36. Contenuti della lezione

Nella prima parte della lezione si sono trattati gli insiemi convessi (in $\mathbf{R}^n$) e le funzioni convesse in più variabili. Gli argomenti trattati sono contenuti nel paragrafo **11.5** del libro di testo, del quale si sono comunque tralasciati i teoremi **11.17**, **11.18** e **11.19**.
Si è comunque dato risalto al fatto che, per una funzione in più variabili, la convessità è **equivalente** alla convessità di tutte le sue restrizioni a rette.
Ciò dovrebbe consentire allo studente di concludere da solo diversi fatti, tra i quali quello che il grafico di una funzione convessa sta sempre sopra al grafico del piano tangente, che è il significato del teorema **11.17**.
Nella seconda parte della lezione si è affrontato il problema della determinazione dei massimi e minimi di una funzione in più variabili, che nel libro di testo è affrontato nel capitolo **11.6**. Per completare la trattazione rimane solo da concludere la dimostrazione del teorema che permette di determinare la natura dei punti critici attraverso lo studio della matrice Hessiana (teorema **11.25**). Tale dimostrazione non è presente nel libro di testo e verrà pertanto riportata nel sunto della lezione seguente, quando verrà completata a lezione.

37. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica e si eserciti cercando di risolvere i problemi che gli proponiamo nel paragrafo successivo.
I problemi **37**, **38** e **42** sono standard, mentre il **39**, il **40** e il **41**, pur non difficili, servono a far riflettere lo studente sul concetto di convessità.

38. Lista dei problemi

37. Dire, motivando la risposta, se i seguenti insiemi sono convessi oppure no:

$$\begin{aligned}
A &= \mathbf{R}^2, \\
B &= \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}, \\
C &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 0 < x+y < 1\right\}, \\
D &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 0 < x+y < 1\right\} \cup \{(0,0),\ (-1,1)\}, \\
E &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 0 < x+y < 1\right\} \cup \{(0,0),\ (0,1)\}, \\
F &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |x|+|y| < 1\right\}, \\
G &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |x|+|y| < 1\right\} \cup \{(1,0)\}, \\
H &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |x|+|y| < 1\right\} \cup \{(1,0),\ (0,1)\}, \\
I &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 < 1\right\}, \\
J &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 < 1\right\} \cup \{(1,0)\}, \\
K &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 < 1\right\} \cup \{(1,0),\ (0,1)\}, \\
L &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 < 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 = 1 \text{ con } x \in \mathbf{Q}\right\}.
\end{aligned}$$

38. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare in quali zone sono convesse (o concave) debolmente e/o strettamente. Motivare ogni affermazione con le necessarie argomentazioni.

$$f_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

$$f_2(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x^{16}$$

$$f_3(x,y) = 3x + 7y$$

$$f_4(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 11x - 2y$$

$$f_5(x,y) = x^8 + y^8$$

$$f_6(x,y) = x^3 + y^3 + 4x$$

$$f_7(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f_8(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$$

39. Dire se è vero che una funzione $f(x, y)$ definita su tutto $\mathbf{R}^2$ e dotata di simmetria radiale è convessa se e solo se è convessa la sua restrizione all'asse x.
Nel caso sia vero, dimostrarlo; nel caso sia falso, esibire un controesempio.

40. Cosa succede nel problema **39** se la restrizione si prende solo sulla parte positiva dell'asse x?

41. Dire se è vero che una funzione $f(x, y)$ definita su tutto $\mathbf{R}^2$ è convessa se e solo se è convessa nella variabile x per ogni fissato valore di y e nella variabile y per ogni fissato valore di x.
Nel caso sia vero, dimostrarlo; nel caso sia falso, esibire un controesempio.

42. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare i punti stazionari e studiarne la natura. Nel caso si tratti di punti di estremo relativo, dire se sono anche di estremo assoluto, motivando la risposta.

$$f_1(x, y) = \ln(4 + xy) - \frac{1}{10}(x^2 + y^2)$$

$$f_2(x, y) = x^3y^3 - 24(x^2 + y^2)$$

$$f_3(x, y) = 3x^4 + 3y^4 + 10x^2y^2 - 16x^2 - 16y^2$$

$$f_4(x, y) = (3x + 3y + 10)e^{x^2+y^2}$$

$$f_5(x, y) = (6x + 6y - 13)e^{x^2+y^2}$$

$$f_6(x, y) = (2x + 2y + 5)e^{xy}$$

$$f_7(x, y) = 8x^3y^3 - 3(x^8 + y^8)$$

$$f_8(x, y) = x^3y^3 + 3(x^4 + y^4)$$

$$f_9(x, y) = (1 + x^2)\sin y$$

$$f_{10}(x, y) = x^2 \cos y$$

39. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 56.

Dare la definizione di insieme convesso in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 57.

Dare la definizione di funzione (in più variabili) debolmente convessa e strettamente convessa. Fare lo stesso per debolmente concava e strettamente concava.

Domanda 58.

Dire, motivando la risposta, che relazione c'è, per una funzione in più variabili, tra l'essere convessa su un insieme convesso A e l'essere convessa ristretta ad ogni segmento contenuto in A.

Domanda 59.

Enunciare e dimostrare il teorema, per le funzioni in più variabili, che mette in relazione la convessità con gli autovalori della matrice Hessiana.

Domanda 60.

Dare la definizione di punto di massimo (minimo) relativo e assoluto, debole o stretto, per una funzione in più variabili a valori scalari.

Domanda 61.

Dare la definizione di punto di sella per una funzione in più variabili a valori scalari.

Domanda 62.

Dare la definizione di punto stazionario per una funzione in più variabili.

Domanda 63.

Enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione il fatto di essere un punto di estremo relativo per una funzione in più variabili, con il fatto di essere un punto stazionario.

Domanda 64.

Enunciare e dimostrare il teorema che serve a stabilire la natura dei punti stazionari di una funzione in più variabili, utilizzando la matrice Hessiana.

40. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 9

A.A. 2012-2013
19 Ottobre 2012
ore 14.00-15.45

41. Contenuti della lezione

Gli argomenti trattati in questa lezione sono contenuti nei paragrafi **11.4**, **11.6** e **11.7** del libro di testo.
La dimostrazione del teorema **11.15** (già iniziata nella lezione precedente) è stata completata in un modo leggermente diverso da quello del libro di testo.
Riportiamo qui sotto quella fatta a lezione.

Definizione 3.

Sia M una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita da $Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$.
Diremo che:

(**a**) Q è **definita positiva** se $Q(\overline{x}) > 0$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n - \{\overline{0}\}$;

(**b**) Q è **definita negativa** se $Q(\overline{x}) < 0$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n - \{\overline{0}\}$.

Definizione 4.

Sia M una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita da $Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$. Diremo che Q è **coercitiva** se esiste una costante $K > 0$ tale che

$$Q(\overline{x}) \geq K\|\overline{x}\| \qquad \text{per ogni } \overline{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Lemma 11.

Sia M una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >$ la forma quadratica definita a partire da M. Allora Q è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di M sono strettamente positivi mentre è definita negativa se e solo se tutti gli autovalori di M sono strettamente negativi.

Lemma 12.

Sia M una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >$ la forma quadratica definita a partire da M. Se Q è definita positiva allora è anche coercitiva, mentre se Q è definita negativa allora è $-Q(x)$ ad essere coercitiva.

Dimostrazione del Lemma 12.

Sia $S = \{\overline{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\overline{x}\| = 1\}$.
Si noti che S è compatto, perché è chiuso e limitato.
Inoltre $Q(\overline{x})$ è continua, perché è un polinomio.
Quindi, per il teorema di Weierstrass, $Q(\overline{x})$ ha su S un minimo che indicheremo con m. Notiamo che $m > 0$ perché $Q(\overline{x})$ è una forma quadratica definita positiva, e quindi strettamente positiva su tutto S.
Per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n - \{\overline{0}\}$, si ha:

$$Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >=< M\frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}, \frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|} > \cdot \|\overline{x}\|^2 \geq m\|\overline{x}\|^2, \tag{15}$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla linearità del prodotto scalare in ciascuno dei suoi argomenti, mentre l'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che $\dfrac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}$ è un versore e quindi sta in S.
Si noti a questo punto che la (15) significa proprio che $Q(\overline{x})$ è coercitiva, che è quanto volevamo dimostrare.
In caso in cui $Q(\overline{x})$ è definita negativa segue in modo ovvio, moltiplicando tutto per -1.

Teorema 13.

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$, $\overline{x}_0$ un punto di A ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2 avente in $\overline{x}_0$ un punto stazionario.
Indicata con $H(\overline{x})$ la matrice Hessiana di f si ha che:

(**a**) se tutti gli autovalori di $H(\overline{x}_0)$ sono strettamente positivi allora $\overline{x}$ è un punto di minimo relativo stretto per f;

(**b**) se tutti gli autovalori di $H(\overline{x}_0)$ sono strettamente negativi allora $\overline{x}$ è un punto di massimo relativo stretto per f;

(**c**) se $H(\overline{x}_0)$ ha almeno un autovalore strettamente negativo e un autovalore strettamente positivo allora $\overline{x}$ è un punto di sella per f.

Dimostrazione del Teorema 13.

Per cominciare, trattiamo il caso in cui $H(\overline{x}_0)$ ha tutti gli autovalori strettamente positivi e quindi la forma quadratica è definita positiva.

Notiamo che, essendo $\overline{x}_0$ un punto stazionario, avremo che $\nabla f(\overline{x}_0)$ è il vettore nullo, di conseguenza, lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine di f nel punto $\overline{x}_0$ è dato da:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) =& f(\overline{x}_0) + \frac{1}{2} < H(\overline{x}_0)(\overline{x} - \overline{x}_0), (\overline{x} - \overline{x}_0) > + o\left(\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^2\right) \geq \\ \geq& f(\overline{x}_0) + \frac{K}{2}\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^2 + o\left(\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^2\right) = \\ =& f(\overline{x}_0) + \left(\frac{K}{2} + o(1)\right)\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^2 \end{aligned} \tag{16}$$

dove K è la costante di coercitività della forma quadratica avente come matrice $H(\overline{x}_0)$.

Poiché $K > 0$, esisterà un intorno di $\overline{x}_0$ nel quale sia $\dfrac{K}{2} + o(1) > 0$. Di conseguenza, per ogni $\overline{x}$ in tale intorno, si avrà $f(\overline{x}) > f(\overline{x}_0)$ e quindi $\overline{x}_0$ è un punto di minimo relativo stretto.

Per la dimostrazione del caso definito negativo, basta osservare che, considerando $-f(\overline{x})$, si ricade nel caso definito positivo.

Infine per trattare il caso **(c)**, basta osservare che restringendo f alla retta passante per $\overline{x}_0$ e avente direzione data dall'autovettore che ha per autovalore λ, si ottiene una funzione (in una variabile), che ha $\overline{x}_0$ come punto stazionario e che è strettamente convessa in un intorno di $\overline{x}_0$ se $\lambda > 0$, mentre è strettamente concava se $\lambda < 0$.

Di conseguenza, in ogni intorno di $\overline{x}_0$, esistono sia punti $\overline{x}$ in cui $f(\overline{x}) > f(\overline{x}_0)$, sia punti $\overline{x}$ in cui $f(\overline{x}) < f(\overline{x}_0)$. Quindi, in tal caso, $\overline{x}_0$ è un punto di sella.

42. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

Per quanto riguarda i problemi proposti nel paragrafo successivo, lo studente ricordi in particolare il risultato contenuto nel problema **43** che è importante perché fornisce un metodo per determinare se una matrice sia definita positiva o definita negativa.

Invece il problema **45** serve a farlo esercitare nello studio dei punti critici, anche nel caso in cui la matrice Hessiana non è utilizzabile.

I problemi **46**, **47**, **48** e **49** servono a far riflettere lo studente sulle differenze che ci sono tra le funzioni in una sola variabile e quelle in più variabili; in particolare il problema **49** dovrebbe fargli capire che non deve mai dare per scontata una proprietà (apparentemente ovvia, ma falsa) per il solo fatto che questa è vera in una sola variabile. Si tratta di problemi a volte difficili che possono eventualmente essere omessi, senza particolari ripercussioni per il resto del corso.

43. Lista dei problemi

43. Si consideri la seguente equazione algebrica di grado n nella variabile λ:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Mostrare che, se essa ha n radici reali, allora esse sono tutte strettamente negative (positive) se e solo se $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ sono tutti strettamente positivi (alternativamente, strettamente negativi e strettamente positivi).

44. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare i punti stazionari e studiarne la natura. Nel caso si tratti di punti di estremo relativo, dire se sono anche di estremo assoluto, motivando la risposta.

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 - xy - xz$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - 2xz$$

$$f_3(x, y, z, w) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4w^2 + yz - xw$$

$$f_4(x, y, z, w) = 3x^4 + 4y^5 + 5z^4 + 2w^6 - 20yz + 12xw$$

$$f_5(x, y, z) = (1 + x^2 + y^2)\sin z$$

$$f_6(x, y, z) = xyz$$

$$f_7(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xyz$$

$$f_8(x, y, z, w) = 8x^2 + 2y^2 + (w + x)^2(z - 1) + z^3$$

45. Per ciascuna delle seguenti funzioni dire, al variare del parametro $\alpha > 0$, se il punto $(0,0)$ è un punto di massimo relativo, minimo relativo o sella. Nel caso si tratti di un punto di estremo relativo, dire se è anche di estremo assoluto oppure no. Motivare ogni affermazione con le necessarie argomentazioni.

$$f_1(x,y) = x^8 + y^4 - (x^2 + y^4)^\alpha$$

$$f_2(x,y) = x^8 + y^4 - (2x^2 + y^4)^\alpha$$

$$f_3(x,y) = x^8 + 2y^6 - (x^2 + y^4)^\alpha$$

$$f_4(x,y) = x^8 + y^6 - (x^2 + y^4)^\alpha$$

46. Costruire una funzione in 2 variabili che ha due punti di sella e nessun punto di estremo relativo.

47. Costruire una funzione in 2 variabili che ha infiniti punti di sella e nessun punto di estremo relativo.

48. Costruire una funzione in 2 variabili per la quale vi sia almeno un punto di sella che è di accumulazione per l'insieme dei punti di estremo relativo.

49. Costruire una funzione in 2 variabili per la quale vi siano esattamente 2 punti stazionari e questi siano entrambi dei punti di massimo relativo.

50. Calcolare $G'(t)$ dove $G(t) = F(\gamma(t))$, con $F(x,y) = xy^2$ e $\gamma(t) = \left(e^t, e^{t^2}\right)$.

51. Come il problema **50**, ma con $F(x,y) = x^2 + y^2$ e $\gamma(t) = \left(\sin(e^t), \cos(e^t)\right)$.

52. Come il problema **50**, ma con $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ e $\gamma(t) = \left(\sin t, \cos t, e^t\right)$.

53. Come il problema **50**, ma con $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ e $\gamma(t) = ((\cos 2t)(\cos t), (\cos 2t)(\sin t), \sin 2t)$.

44. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 65.

Dire chi è il polinomio di Taylor di ordine 2 di una funzione in più variabili ed enunciare per esso l'equivalente del teorema di Peano.

Domanda 66.

Dare la definizione di forma quadratica coercitiva e dire che relazione c'è in $\mathbf{R}^n$ tra l'essere coercitiva e l'essere definita positiva, motivando la risposta con le opportune dimostrazioni.

Domanda 67.

Enunciare e dimostrare il teorema che serve a stabilire la natura dei punti stazionari di una funzione in più variabili, utilizzando la matrice Hessiana.

Domanda 68.

Dire come diventa il teorema richiesto nella domanda **67** nel caso particolarmente semplice delle funzioni in 2 variabili.

Domanda 69.

Dare la definizione di matrice Jacobiana.

Domanda 70.

Enunciare la regola della catena per le derivate delle funzioni in più variabili a valori vettoriali.

45. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 10

A.A. 2012-2013
22 Ottobre 2012
ore 11.30-13.15

46. Contenuti della lezione

Non si sono trattati argomenti nuovi: l'intera lezione è stata dedicata allo svolgimento di alcuni problemi presi dagli scritti dello scorso anno in cui si chiedeva di determinare massimi e minimi relativi e assoluti di funzioni in due variabili.
In particolare ci si è concentrati soprattutto sulla questione (più difficile) degli estremi assoluti.

47. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a risolvere i problemi proposti nelle lezioni precedenti e cominci anche a cimentarsi con i problemi, sullo stesso argomento, assegnati negli esami degli scorsi anni, e i cui testi sono reperibili alla pagina web del docente.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 11

A.A. 2012-2013
23 Ottobre 2012
ore 9.30-11.15

48. Contenuti della lezione

Dopo aver introdotto i concetti principali sulle curve in $\mathbf{R}^n$, che lo studente può trovare nei capitoli **12.1** e **12.2** del libro di testo, è stato enunciato, spiegato e dimostrato il teorema delle funzioni implicite nel suo caso più semplice: funzione scalare in due sole variabili.
Riportiamo qui di seguito enunciato e dimostrazione del teorema.

Teorema 14.

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1 ed $(x_0, y_0) \in A$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Allora esistono I intorno di x_0 e J intorno di y_0 ed esiste $g : I \to J$ di classe C^1 tali che $I \times J \subset A$ e per ogni $(x, y) \in I \times J$ si ha $f(x, y) = 0$ se e solo se $y = g(x)$.
Inoltre, per la derivata di g vale la formula:

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Dimostrazione del Teorema 14.

Osserviamo che, passando eventualmente da f a $-f$, possiamo sempre supporre che sia $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.
Indicato con m il valore $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, dalla continuità di $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ segue che è sempre possibile scegliere $I = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ e $J = [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, in modo tale che $I \times J \subset A$ e che, per ogni $(x, y) \in I \times J$ si abbia:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > \frac{m}{2}. \tag{17}$$

Inoltre, grazie al teorema di Weierstrass e alla continuità di $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, esiste finita la costante positiva M definita da:

$$M = \max_{(x,y)\in I\times J} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|. \tag{18}$$

Notiamo infine che, rimpicciolendo se necessario ρ, è sempre possibile fare in modo che il rettangolo $I \times J$ sia *lungo e stretto*, cioè che valga la condizione:

$$\frac{\delta}{\rho} > \frac{2M}{m}. \tag{19}$$

L'utilità e il significato geometrico di tale condizione saranno chiari in seguito.
A questo punto osserviamo che, grazie al teorema del valor medio, per ogni $(x, y) \in I \times J$ si ha:

$$\begin{aligned} f(x, y) =& f(x, y) - f(x_0, y_0) = \\ =& f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \\ =& \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x - x_0), \end{aligned}$$

dove η è compreso tra y e y_0 e ξ è compreso tra x e x_0.
Di conseguenza, ricordando (17) e (18), per $y \geq y_0$ avremo

$$f(x, y) \geq \frac{m}{2}(y - y_0) - M|x - x_0| \tag{20}$$

mentre per $y < y_0$ avremo

$$f(x, y) \leq \frac{m}{2}(y - y_0) + M|x - x_0| \tag{21}$$

Siccome però la condizione

$$\frac{m}{2}(y - y_0) - M|x - x_0| > 0$$

è equivalente alla condizione

$$y > y_0 + \frac{2M}{m}|x - x_0|, \tag{22}$$

la (20) ha come conseguenza che $f(x, y) > 0$, per tutti gli $(x, y) \in I \times J$ che soddisfano (22), cioè per tutti i punti della zona segnata in grigio chiaro nella figura seguente:

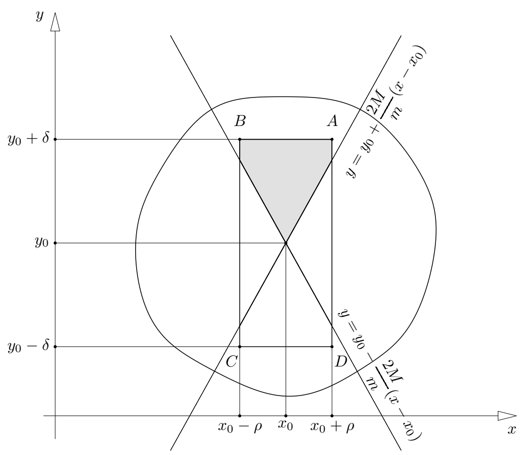

figura 1

In modo del tutto analogo dalla (21) si ottiene che $f(x, y) < 0$, per tutti gli $(x, y) \in I \times J$ che soddisfano

$$y < y_0 - \frac{2M}{m}|x - x_0|, \tag{23}$$

cioè per tutti i punti della zona segnata in grigio scuro nella figura seguente:

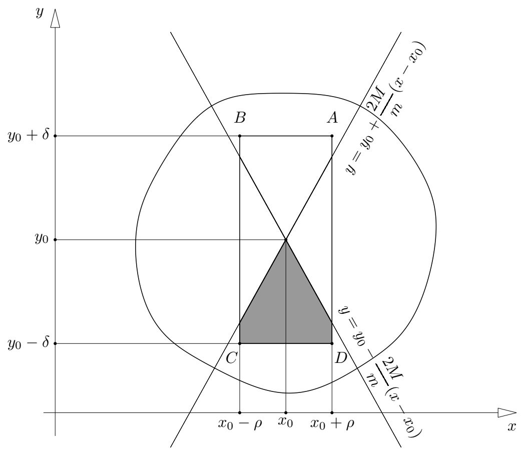

figura 2

Il fatto che il segmento AB stia tutto nella zona grigio chiaro (nella figura 1) e che il segmento CD stia tutto nella zona grigio scuro (nella figura 2) è conseguenza della condizione (19): essa indica che il rapporto tra l'altezza e la base del rettangolo $ABCD$ è maggiore del valore assoluto della pendenza delle due rette oblique passanti per (x_0, y_0) tracciate nelle figure. Di conseguenza le due rette *escono* dal rettangolo passando per i segmenti laterali AD e BC.
Mostriamo ora che, come conseguenza di questo fatto, per ogni $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, esiste un solo $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ tale che $f(x, y) = 0$.
Infatti, per ogni fissato $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, consideriamo il segmento PQ che congiunge i punti $P \equiv (x, y_0 - \delta)$ e $Q \equiv (x, y_0 + \delta)$, come vediamo indicato nella figura seguente:

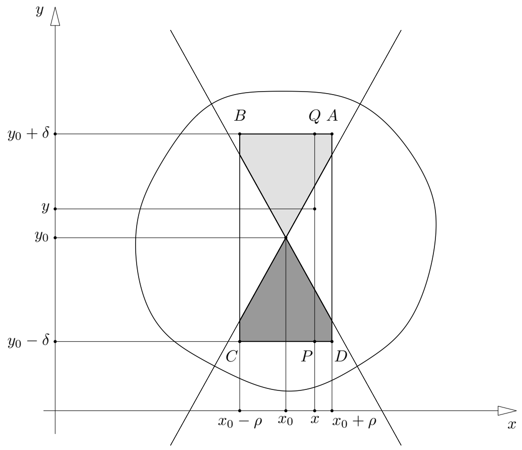

figura 3

Per quanto appena visto si ha $f(x, y_0 - \delta) < 0$ e $f(x, y_0 + \delta) > 0$ e quindi, essendo f continua, per il teorema degli zeri esisterà un punto $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ tale che $f(x, y) = 0$. Inoltre tale y è unico perchè la funzione della sola variabile y che si ottiene restringendo f al segmento PQ è strettamente crescente in quanto la sua derivata $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ è sempre strettamente positiva.

Possiamo quindi concludere che, per ogni $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, esiste un solo $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ tale che $f(x, y) = 0$.
Rimane dunque ben definita una funzione $g : (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \to (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ che associa ad ogni $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ l'unico $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ tale che $f(x, y) = 0$.
Osserviamo che, poiché nella zona grigio chiaro si ha $f(x, y) > 0$ e nella zona grigio scuro si ha $f(x, y) < 0$, il grafico di g deve necessariamente trovarsi nella parte bianca del rettangolo $ABCD$ (vedi figura 4)

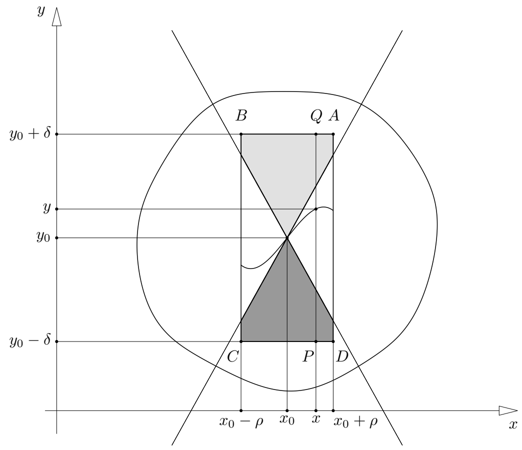

figura 4

Da ciò, in particolare, segue che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 = g(x_0),$$

cioè che g è continua in x_0.
Mostriamo ora che, in realtà, g è anche derivabile in x_0 e si ha $g'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$.
A tale scopo ricordiamo che, essendo f di classe C^1 essa è anche differenziabile, quindi, per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ si ha:
(24)
$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right).$$

In particolare, poichè g è continua in x_0 ed $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, dalla (24) si ottiene che per $x \to x_0$ si ha:

$$0 = 0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(g(x) - g(x_0)) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (g(x) - g(x_0))^2}\right).$$

da cui, dividendo ambo i membri per $(x - x_0)$, si ottiene che per $x \to x_0$ si ha:

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = o\left(\sqrt{1 + \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)^2}\right). \tag{25}$$

A questo punto ricordiamo (vedi figura 4) che il grafico di $g(x)$ è nella zona bianca del rettangolo $ABCD$ e, di conseguenza,

$$\left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \frac{2M}{m}.$$

Di conseguenza $\sqrt{1 + \left(\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)^2}$ è una funzione limitata e quindi la (25) equivale a dire che $f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ è infinitesima.
Quindi si ha:

$$0 = \lim_{x \to x_0}\left(f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) =$$
$$= f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\lim_{x \to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

da cui segue:

$$\lim_{x \to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}, \tag{26}$$

che è quanto volevamo dimostrare.
Per concludere osserviamo che in ogni altro punto del grafico di g valgono le stesse ipotesi che valgono nel punto (x_0, y_0), quindi vale la formula (26).
Ciò dimostra che g è di classe C^1 su tutto l'intervallo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

49. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica e svolgendo i problemi della lista che gli proponiamo nel capitolo successivo.

50. Lista dei problemi

$\boxed{54.}$ Siano $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x^2 + 8y^2$ e $P \equiv (1, 2)$. Detto c il valore che f assume in P e detta $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$, dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo, trovare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P.
Fare lo stesso usando i punti $Q \equiv (-1, 1)$, $R \equiv (0, 0)$ e $S \equiv (2, 0)$ al posto di P. Nel caso qualche punto tra quelli assegnati non sia un punto regolare, cercare lo stesso di descrivere come è fatto localmente l'insieme Γ.

55. Come per il problema **54**, ma con $f(x,y) = x^2y^2 + 2xy^2 + 4x^2y + 4x^2 + y^2 + 8xy + 8x + 4y$, $P \equiv (0,0)$, $Q \equiv (1,1)$, $R \equiv (-1,-2)$ e $S \equiv (-1,0)$.

56. Come per il problema **54**, ma con $f(x,y) = x^6 + x^2y^4 - 2x^5 - 2xy^4 + x^4 + y^4$, $P \equiv (0,1)$, $Q \equiv (-1, \sqrt[4]{5})$, $R \equiv (0,0)$ e $S \equiv (1,1)$.

51. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 71.

Dire cos'è una curva, una curva di classe C^k e una curva regolare. Dire inoltre cos'è il sostegno di una curva e cosa sono gli estremi.

Domanda 72.

Dare la definizione di vettore tangente.

Domanda 73.

Motivare la necessità di definire il concetto di curva regolare, esibendo una curva di classe almeno C^1 avente il supporto dotato di "spigoli".

Domanda 74.

Dare la definizione di curva rettificabile e di lunghezza di una curva rettificabile.

Domanda 75.

Dire se le curve C^1 sono rettificabili.

Domanda 76.

Enunciare e dimostrare il teorema delle funzioni implicite nel caso di una sola funzione scalare in due variabili.

52. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 12

A.A. 2012-2013
26 Ottobre 2012
ore 14.00-15.45

53. Contenuti della lezione

Gli argomenti trattati sono tutti contenuti nei paragrafi **13.1**, **13.1.2**, **13.1.3**, **13.1.4**, **13.1.5** e **13.1.6** del libro di testo.

54. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre svolga i 4 problemi che gli proponiamo nel capitolo successivo.

55. Lista dei problemi

57. Siano $f(x,y,z) = xe^{x-2} + ye^{y-1} + ze^{z-3}$ e $P \equiv (2,1,3)$. Detto c il valore che f assume in P e detta $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z) = c\}$, dire se P è un punto regolare per Σ e, in caso affermativo, trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto P.
Fare lo stesso usando i punti $Q \equiv (0,0,0)$, $R \equiv (1,-1,-1)$ e $S \equiv (-1,-1,-1)$ al posto di P. Nel caso qualche punto tra quelli assegnati non sia un punto regolare, cercare lo stesso di descrivere come è fatto localmente l'insieme Σ.

58. Come per il problema **57**, ma con $f(x,y,z) = 3^{xyz} - x^4 - y^4 - z^4$, $P \equiv (1,1,1)$, $Q \equiv (-1,1,-1)$, $R \equiv (1,0,0)$ e $S \equiv (0,-1,0)$.

59. Siano $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid xyz = 4,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$, e $P \equiv (1,2,2)$. Dopo aver verificato che P è un punto regolare per Γ trovare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P.
Fare lo stesso usando i punti $Q \equiv (2,-1,-2)$ e $S \equiv (-1,-2,2)$ al posto di P.

60. Siano $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2^x + 2^y = 2^z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 6\}$, e $P \equiv (1,1,2)$. Dopo aver verificato che P è un punto regolare per Γ trovare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P.

56. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 77.

Enunciare il teorema delle funzioni implicite nel caso di una funzione scalare definita su $\mathbf{R}^3$.

Domanda 78.

Enunciare il teorema delle funzioni implicite nel caso di due funzioni scalari definite su $\mathbf{R}^3$.

Domanda 79.

Enunciare il teorema delle funzioni implicite nel caso generale: m funzioni scalari definite su $\mathbf{R}^n$, con $m < n$.

57. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 13

A.A. 2012-2013
29 Ottobre 2012
ore 11.30-13.15

58. Contenuti della lezione

La parte trattata, cioè il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel caso particolare di un solo vincolo in $\mathbf{R}^2$, è contenuta nel paragrafo **13.2**.

59. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica con le demande di verifica e la propria abilità nei problemi svolgendo quelli del paragrafo che segue.

60. Lista dei problemi

61. Dati $f(x,y) = x^2+4y^2$ e $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2+y^2\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

62. Dati $f(x,y) = xy$ e $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 5x^2+5y^2+6xy=4\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

63. Dati $f(x,y) = y^3e^x$ e $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+3y^2=4\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

64. Dati $f(x,y) = y^4e^x$ e $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4y^2-x^2=3\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

65. Dati $f(x,y) = \sin^2 x+\sin^2 y$ e $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

61. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 80.

Enunciare e dimostrare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso particolare di un solo vincolo in $\mathbf{R}^2$.

Domanda 81.

Dare la definizione di punto stazionario vincolato nel caso di un solo vincolo in $\mathbf{R}^2$.

Domanda 82.

Spiegare come si può stabilire se un punto stazionario vincolato è, oppure no, un punto di massimo o minimo relativo vincolato, nel caso di un solo vincolo in $\mathbf{R}^2$.

62. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 14

A.A. 2012-2013
30 Ottobre 2012
ore 9.30-11.15

63. Contenuti della lezione

La parte trattata, cioè il riconoscimento di estremi vincolati quando questi sono sul bordo di un insieme di $\mathbf{R}^2$ con parte interna non vuota, è tutta contenuta nel paragrafo **13.3**.

64. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

Inoltre svolga i problemi della lista che gli proponiamo nel capitolo successivo, che sono problemi (tutti molto standard) assegnati in esami di anni passati.

65. Lista dei problemi

66. Sia $f(x,y) = xy^2$ e sia
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 3\}.$$

(27) Trovare i punti stazionari di f sul bordo di D.
(28) Trovare eventuali punti stazionari di f interni a D.
(29) Trovare (se ci sono) massimo e minimo assoluto di f su D.
(30) Studiare la natura dei punti trovati in (27) considerando solo il bordo di D.
(31) Dei punti che sono di estremo relativo per f considerando solo il bordo di D, dire quali rimangono di estremo relativo anche quando si considera la parte interna di D.

67. Sia $f(x,y) = xy$ e sia
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+4y^2 \le 16,\ 4x^2+y^2 \ge 16,\ x \ge |y|\}.$$

(32) Trovare i punti stazionari di f sul bordo di D.
(33) Trovare eventuali punti stazionari di f interni a D.
(34) Trovare (se ci sono) massimo e minimo assoluto di f su D.
(35) Studiare la natura dei punti trovati in (32) considerando solo il bordo di D.
(36) Dei punti che sono di estremo relativo per f considerando solo il bordo di D, dire quali rimangono di estremo relativo quando si considera anche la parte interna di D.

68. Sia data la funzione $f(x,y) = x^2y+xy^2+xy$ e l'insieme
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \ge \frac{1}{16},\ x+y \ge -1,\ x \le 0,\ y \le 0\right\}$$

(37) Disegnare l'insieme D.
(38) Trovare eventuali punti stazionari liberi di f interni a D e studiarne la natura.
(39) Determinare il massimo e il minimo assoluto di f su D.

69. Utilizzare i moltiplicatori di Lagrange per determinare gli estremi di $f(x,y) = 2x^2+y^2$ sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+2y^2 \ge 1\}$.

70. Sia $f(x,y) = e^{xy^2+x^2y+xy}$ e sia
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \le 1\}.$$

(40) Trovare eventuali punti stazionari liberi di f interni a D e studiarne la natura.
(41) Trovare i punti stazionari vincolati di f sul bordo di D.
(42) Trovare (se ci sono) massimo e minimo assoluto di f su D.
(43) Studiare la natura dei punti trovati in (41) considerando solo il bordo di D.
(44) Dei punti che sono di estremo relativo per f considerando solo il bordo di D, dire quali rimangono di estremo relativo anche quando si considera la parte interna di D.

71. Sia $f(x,y)=xy$ e sia

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2+12x+11\geq 0,\; x^2+y^2\leq 25\right\}.$$

(45) Trovare eventuali punti stazionari liberi di f interni a D e studiarne la natura.
(46) Trovare i punti stazionari vincolati di f sul bordo di D.
(47) Trovare (se ci sono) massimo e minimo assoluto di f su D.
(48) Studiare la natura dei punti trovati in (46) considerando solo il bordo di D.
(49) Dei punti che sono di estremo relativo per f considerando solo il bordo di D, dire quali rimangono di estremo relativo anche quando si considera la parte interna di D.

66. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 83.

Dato Ω aperto di $\mathbf{R}^2$, $f:\Omega\to\mathbf{R}$, e D insieme chiuso contenuto in Ω, dire in cosa consiste il *metodo delle curve di livello* per stabilire se un punto del bordo di D, sia di estremo relativo per f ristretta a D.

Domanda 84.

Dati un insieme aperto $A\subset\mathbf{R}^2$, un insieme chiuso $D\subset A$ con parte interna non vuota ed $f:A\to\mathbf{R}$ di classe C^1, dire come si può usare il gradiente di f per stabilire se un punto di estremo relativo per f ristretta a ∂D sia di estremo relativo anche per f ristretta D.

67. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 15

A.A. 2012-2013
2 Novembre 2012
ore 14.00-15.45

68. Contenuti della lezione

Su richiesta degli studenti, molti dei quali contavano su un'interruzione della didattica per il ponte, la lezione è stata svolta non in aula, ma mettendo on-line, poco prima dell'orario stabilito della lezione un video preventivamente registrato dal docente, con gli svolgimenti dei seguenti problemi: il terzo punto del problema **42**, il settimo punto del problema **44**, il primo punto del problema **45** e il problema **68**.
Si consigliano gli studenti di usufruire della lezione nel modo seguente: Prima provare a svolgere da soli, per un paio d'ore, gli esercizi svolti nelle lezione, e solo dopo guardare gli svolgimenti proposti dal docente.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **16**

A.A. 2012-2013
5 Novembre 2012
ore 11.30-13.15

69. Contenuti della lezione

Gli argomenti trattati sono tutti contenuti nei paragrafi **13.4**, **13.5** e **13.6** del libro di testo.

70. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre svolga i problemi gli proponiamo nel capitolo successivo.

71. Lista dei problemi

72. Trovare il massimo e il minimo assoluti di $f(x, y, z) = xyz$ sulla superficie

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 3\right\}.$$

73. Trovare il massimo e il minimo assoluti di $f(x, y, z) = x + y + z$ sulla curva

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{7},\ 2x - y = 1\right\}.$$

72. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 85.

Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di un vincolo in $\mathbf{R}^3$.

Domanda 86.

Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di 2 vincoli in $\mathbf{R}^3$.

Domanda 87.

Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso generale: m vincoli in $\mathbf{R}^n$, con $m < n$.

73. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **17**

A.A. 2012-2013
6 Novembre 2012
ore 9.30-11.15

74. Contenuti della lezione

La lezione è stata completamente dedicata allo svolgimento di problemi sugli estremi vincolati: sono stati svolti i problemi sugli estremi vincolati degli appelli del 15 febbraio 2011 (fila B), del 5 luglio 2011 e del 2 settembre 2011.

75. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria abilità nei problemi svolgendo quelli del paragrafo che segue.

76. Lista dei problemi

74. Dati $f(x, y, z) = 3x + 2y + z$ e $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \le 0\right\}$, trovare massimo e minimo assoluto di f ristretta a Σ.

75. Trovare i punti di $\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 4,\ x + y + z = 1\right\}$, che massimizzano o mimimizzano la distanza dall'origine.

76. Dati $f(x, y, z) = xyz$ e $\Sigma_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = (z - 1)^2\right\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Σ_1.
Inoltre, detta $\Sigma_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = (z - 1)^2,\ -1 \le z \le 1\right\}$, trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta a Σ_2.

77. Dati $f(x, y, z) = y^2(x^2+y^2+z^2-25)$ e $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \le 25,\ -4 \le z \le 4\right\}$, trovare massimo e minimo assoluto di f ristretta a V.

78. Siano $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 2y^2 = 8\right\}$ e $P \equiv (0, 1)$. Trovare i punti di Γ che hanno distanza minima o massima da P.

79. Siano $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 2y^2 = 8\right\}$ e $\Lambda = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 - 2x = 0\right\}$.
Trovare P su Γ e Q su Λ in modo che il segmento PQ abbia lunghezza minima.
Trovarli poi anche in modo che la lunghezza di PQ sia massima.

80. Tra tutti i parallelepipedi tali che la somma delle aree dell 6 facce sia minore o uguale a 24 trovare, se c'è, quello che ha volume massimo.

77. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 18

A.A. 2012-2013
9 Novembre 2012
ore 14.00-15.45

78. Contenuti della lezione

Gli argomenti trattati sono tutti contenuti nei paragrafi **12.1.1**, **12.3** e **12.4** del libro di testo.

79. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

80. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 88.

Dare due definizioni di curve equivalenti, una che tenga conto anche dell'orientazione e l'altra no.

Domanda 89.

Definire l'integrale curvilineo di prima specie e mostrare che passando a una curva equivalente l'integrale non cambia.

Domanda 90.

Dare la definizione di forma differenziale.

Domanda 91.

Definire l'integrale curvilineo di seconda specie e mostrare che passando a una curva equivalente l'integrale può solo cambiare segno.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 19

A.A. 2012-2013
12 Novembre 2012
ore 11.30-13.15

81. Contenuti della lezione

Nella lezione si è quasi conclusa la parte di teoria sulle forme differenziali: l'ultimo teorema, quello che stabilisce che le forme chiuse sugli insiemi semplicemente connessi sono esatte, verrà ripreso all'inizio della lezione successiva.

Gli argomenti trattati sono tutti contenuti nei paragrafi **12.4**, **12.4.1** e **12.4.2** del libro di testo.

82. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

Inoltre svolga i problemi della lista che gli proponiamo nel capitolo successivo: sono problemi (tutti molto standard) assegnati in esami di anni passati.

83. Lista dei problemi

81. Sia data la curva in $\mathbf{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{2}{3}t^3\right),$$

con $-1 \le t \le 1$.

(50) Dire motivando la risposta se γ è una curva regolare.
(51) Calcolare la lunghezza di γ.
(52) Dire motivando la risposta se γ può essere riparametrizzata in modo da diventare una curva regolare.

82. Sia data la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [-1, 1]$, dove $x(t)$ e $y(t)$ sono definiti da:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + t^3 \\ y(t) = t^2 + 3\sin 2t. \end{cases}$$

Determinare l'equazione della retta tangente a $\gamma(t)$ in $t = 0$.

83. Calcolare $\int_\gamma y\,ds$, dove γ è la curva di equazione $x^2 = y^3$, $(0 \le x \le 1)$.

84. Sia data la forma differenziale $\omega = (\lambda + xy)e^{xy}dx + x^2e^{xy}dy$, dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbf{R}$.

(53) Dire per quali valori del parametro λ la forma differenziale ω è esatta.
(54) Per ciascuno dei valori trovati al punto (53) trovare una funzione potenziale per ω.
(55) Per ciascuno dei valori trovati al punto (53) calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

85. Sia data la forma differenziale $\omega = \frac{5x+2y}{x^2+y^2}dx + \frac{5y-2x}{x^2+y^2}dy$.

Dire motivando la risposta

(56) se ω è chiusa sul suo dominio;
(57) se ω è esatta sul suo dominio e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale;
(58) se ω è esatta sul semipiano $\{x > 0\}$ e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale.

86. Sia data la forma differenziale $\omega = xy^4 e^{x^2+y^2} dx + y^3(\lambda + y^2)e^{x^2+y^2} dy$, dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbf{R}$.

(59) Dire per quali valori del parametro λ la forma differenziale ω è esatta.
(60) Per ciascuno dei valori trovati al punto (59) trovare una funzione potenziale per ω.
(61) Per ciascuno dei valori trovati al punto (59) calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ con $t \in [0,1]$.

87. Sia data la forma differenziale $\omega = xye^{x^2-y^2} dx + (\lambda - y^2)e^{x^2-y^2} dy$, dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbf{R}$.

(62) Dire per quali valori del parametro λ la forma differenziale ω è esatta.
(63) Per ciascuno dei valori trovati al punto (62) trovare una funzione potenziale per ω.
(64) Per ciascuno dei valori trovati al punto (62) calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ con $t \in [0,1]$.

88. Sia

$$\omega = \frac{4x^3}{1+x^4+y^4}dx + \frac{4y^3}{1+x^4+y^4}dy + \log(1+x^2+y^2+z^2)dz$$

e sia $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ con γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4 definite da:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 1,\ y = 0,\ 0 \le z \le 1\} \\
\gamma_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ y \ge 0,\ z = 0\} \\
\gamma_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = -1,\ y = 0,\ 0 \le z \le 1\} \\
\gamma_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ y \le 0,\ z = 1\}
\end{aligned}$$

ed orientate come illustrato nella figura seguente:

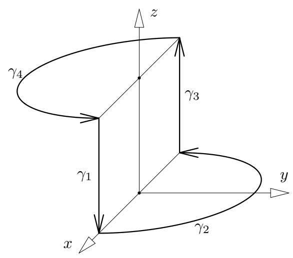

figura 5

(65) Calcolare $\int_\gamma \omega$.
(66) Cosa si può dire di $\int_\gamma \omega$ se γ_2 e γ_4 sono curve di altro tipo ma sempre con gli stessi estremi e giacenti sempre sui piani $z = 0$ e $z = 1$, rispettivamente?

89. Sia data la forma differenziale $\omega = -3\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{6xy}{(x^2+y^2)^2}dy$, definita per $(x,y) \neq (0,0)$.

(67) Calcolare $\int_\Gamma \omega$, dove Γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 6.
(68) Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari contenute in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ passanti da $(-1,2)$ a $(0,3)$. Si può affermare che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$?

90. Siano date le forme differenziali

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{y}{(x+1)^2+y^2}dx - \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}dy, \\
\omega_2 &= \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy.
\end{aligned}$$

(69) Dire se ω_1 e ω_2 sono chiuse in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.
(70) Calcolare $\int_{\gamma_1} \omega_1$, $\int_{\gamma_2} \omega_1$, $\int_{\gamma_1} \omega_2$ e $\int_{\gamma_2} \omega_2$, dove γ_1 e γ_2 sono le circonferenze di raggio 1 e di centro, rispettivamente, $(-1,0)$ e $(1,0)$ orientate in senso antiorario.
(71) Se γ è una curva chiusa contenuta in $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \ge 4\}$, che cosa si può dire di $\int_\gamma (\omega_1 + \omega_2)$?

84. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 92.

Dare la definizione di forma differenziale esatta e di funzione potenziale.

Domanda 93.

Dare la definizione di forma differenziale chiusa.

Domanda 94.

Mostrare che una forma differenziale esatta è anche chiusa, ma non viceversa.

Domanda 95.

Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza in tre modi diversi le forme differenziali esatte.

Domanda 96.

Dare la definizione di omotopia tra curve e dire cosa significa che un insieme è semplicemente connesso.

Domanda 97.

Enunciare il teorema che spiega come si comporta l'integrale di una forma differenziale chiusa su curve omotope.

85. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 20

A.A. 2012-2013
13 Novembre 2012
ore 9.30-11.15

86. Contenuti della lezione

Dopo aver ripreso e concluso l'ultimo teorema della lezione precedente, quello che stabilisce che le forme chiuse sugli insiemi semplicemente connessi sono esatte, il resto della lezione è stato interamente dedicato allo svolgimento di esercizi sulle forme differenziali, presi da quelli proposti nella lezione precedente.

87. Lavoro proposto per casa

Lo studente svolga i problemi della lista che gli proponiamo nel capitolo successivo, tenendo presente che il problema **92** è più difficile degli altri.

Il problema **91** invece serve a far familiarizzare lo studente con il concetto di insieme semplicemente connesso. In particolare, lo studente provi a cimentarsi anche con l'insieme S del problema **91**: si tratta di un insieme in $\mathbf{R}^4$ (pur semplicissimo) e quindi lo studente non potrà visualizzarlo.

Scoprirà che, di fatto, venuta meno l'intuizione geometrica, la definizione formale data di curve omotope, è la sola che gli può venire in aiuto, anche se, come prima impressione, lo studente potrebbe averla considerata enormenente (e inutilmente!) complicata.

88. Lista dei problemi

91. Dire, motivando la risposta, se i seguenti insiemi sono semplicemente connessi oppure no:

$$
\begin{aligned}
A &= \mathbf{R}^2, \\
B &= \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}, \\
C &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 1\}, \\
D &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}, \\
E &= \mathbf{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y=0 \text{ e } x>5\}, \\
F &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x>y^2\} - \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y=0 \text{ e } x>1\}, \\
G &= \mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}, \\
H &= \mathbf{R}^3 - \{(0,0,0),\ (1,0,0)\}, \\
I &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}, \\
J &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \geq 1\}, \\
K &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}, \\
L &= \mathbf{R}^3 - \{(x,0,0) \mid -1 \leq x \leq 1\}, \\
M &= \mathbf{R}^3 - \{(x,0,0) \mid x \geq 0\}, \\
N &= \mathbf{R}^3 - \{(x,0,0) \mid x \in \mathbf{R}\}, \\
O &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}, \\
P &= \mathbf{R}^3 - \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 = 1\}, \\
Q &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+y^2} \leq -3\right\}, \\
R &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+y^2} = -3\right\}, \\
S &= \mathbf{R}^4 - \{(x,0,0,0) \mid x \in \mathbf{R}\}.
\end{aligned}
$$

92. Dato l'insieme $A = \mathbf{R}^4 - \{(x,y,0,0) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$ dire, motivando la risposta, prima se è connesso per archi, poi se è semplicemente connesso.

89. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 98.

Dire, motivando la risposta, che relazione c'è tra insiemi convessi e insiemi semplicemente connessi.

Domanda 99.

Enunciare il teorema che caratterizza le forme esatte sugli insiemi semplicemete connessi.

90. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 21

A.A. 2012-2013
2 Novembre 2011
ore 14.00-15.45

91. Contenuti della lezione

La lezione è stata interamente dedicata allo svolgimento di esercizi sulle forme differenziali, presi dai testi d'esame degli anni precedenti.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 22

A.A. 2012-2013
19 Novembre 2012
ore 11.30-13.15

92. Contenuti della lezione

Per cominciare lo studente osservi gli esempi che seguono:

Esempio 1.

Cerchiamo tutte le funzioni $y(x)$ tali che

$$y' = y. \tag{72}$$

La verifica diretta mostra che tutte le funzioni $y(x)$ del tipo

$$y(x) = Ke^x$$

vanno bene, per ogni valore reale assegnato al parametro K.
Si potrebbe inoltre dimostrare che, oltre ad esse, non vi sono altre funzioni che soddisfano (72). Omettiamo momentaneamente tale dimostrazione, visto che essa sarà conseguenza immediata di uno dei prossimi teoremi.
Osserviamo che prendendo l'insieme di tutte le soluzioni di (72), queste *coprono* tutto $\mathbf{R}^2$ senza mai intersecarsi tra loro.

Esempio 2.

Cerchiamo tutte le funzioni $y(x)$ tali che

$$y' = y^2. \tag{73}$$

La verifica diretta mostra che tutte le funzioni $y(x)$ del tipo

$$y(x) = -\frac{1}{x-K}$$

soddisfano la (73), per ogni fissato valore reale assegnato al parametro K.
A queste va inoltre aggiunta la funzione identicamente nulla.
Oltre a queste non vi sono altre soluzioni, cosa che si può facilmente dimostrare applicando uno dei prossimi teoremi.
Notiamo che, anche questa volta, se si considera l'insieme di tutte le soluzioni di (73), esse *coprono* tutto $\mathbf{R}^2$ senza mai intersecarsi tra loro.

Uguaglianze come la (72) e la (73) e, più in generale, del tipo

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = G(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x)$$

prendono il nome di equazioni differenziali.
Diamo le seguenti definizioni:

Definizione 5.

Una coppia $(I, y(x))$, dove I è un **intervallo** aperto di R ed $y(x)$ è una funzione di classe C^n su I, si dice **soluzione** dell' equazione differenziale

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = G(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) \tag{74}$$

se, sostituita nella (74), rende il primo membro uguale al secondo.

Definizione 6.

Data l'equazione differenziale

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = G(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x)$$

diremo che il suo ordine è il massimo ordine di derivazione con cui vi compare $y(x)$.

Definizione 7.

Un'equazione differenziale si dirà **scritta in forma normale**, se si presenta esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo della $y(x)$, cioè se si presenta nella forma:

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, x).$$

Noi saremo interessati in particolare alle equazioni del primo ordine scritte in forma normale, cioè a quelle del tipo

$$y' = f(x, y) \tag{75}$$

e di queste studieremo il cosidetto **problema di Cauchy**, cioè saremo interessati a trovare, tra tutte le soluzioni di (75), quella che passa per un fissato punto (x_0, y_0). Detto più formalmente, cercheremo $y(x)$ che soddisfi:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Negli esempi 1 e 2 abbiamo visto che i grafici di tutte le soluzioni dell'equazione considerata "coprono" tutto $\mathbf{R}^2$ senza mai intersecarsi tra loro.
Detto in altre parole: per ogni punto di $\mathbf{R}^2$ passa una e una sola soluzione dell'equazione differenziale.
Questo fatto non è casuale, infatti vale il seguente teorema:

Teorema 15. (di esistenza e unicita locale)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua ed $(x_0, y_0) \in A$.
Supponiamo inoltre che $f(x, y)$ soddisfi la cosidetta condizione di Lipschitz:
(76) esiste un intorno rettangolare $\mathcal{R}$ di (x_0, y_0), con $\mathcal{R} \subset A$, ed esiste una costante $L > 0$ tale che, comunque si prendano in $\mathcal{R}$ i punti (x, y_1) e (x, y_2), vale la disuguaglianza $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$.
Allora esistono I intorno di x_0 e J intorno di y_0 tali che $I \times J \subset A$ ed esiste unica $y(x)$ di classe C^1 su I ed a valori in J che soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Di tale teorema ometteremo la dimostrazione. In realtà un teorema simile continua a valere anche senza assumere nelle ipotesi la condizione di Lipschitz, tuttavia in tal caso, pur essendo possibile ugualmente dimostrare l'esistenza di una soluzione, non c'è più speranza di dimostrare la sua unicità, come chiariscono i seguenti esempi.

Esempio 3.

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La verifica diretta mostra che ne sono soluzioni sia la funzione identicamente nulla, sia la funzione definita da:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

anzi, in realtà, le funzioni che soddisfano il problema di Cauchy assegnato sono infinite, visto che vanno bene tutte le funzioni $y_K(x)$ della forma

$$y_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le K \\ \dfrac{(x-K)^2}{4} & \text{per } x > K. \end{cases}$$

qualsiasi sia il valore fissato per $K \ge 0$.
Ciò significa che, per il problema di Cauchy assegnato, la soluzione non è unica.
Ovviamente, in questo caso, non sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità, sia perchè il punto $(0, 0)$ non è interno al dominio di $f(x, y)$, sia perché $f(x, y)$, pur essendo continua, non soddisfa la condizione di Lipschitz.

Esempio 4.

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La verifica diretta mostra che ne sono soluzioni sia la funzione identicamente nulla, sia tutte le funzioni del tipo $y_K(x)$ e del tipo $-y_K(x)$ dove $y_K(x)$ è definita da

$$y_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le K \\ \left(\dfrac{2(x-K)}{3}\right)^{\frac{3}{2}} & \text{per } x > K. \end{cases}$$

qualsiasi sia il valore fissato per $K \ge 0$.
Ciò significa che, per il problema di Cauchy assegnato, la soluzione non è unica.
In questo caso, l'unica ipotesi venuta meno del Teorema di esistenza e unicità è la condizione di Lipschitz.

Nel caso più frequente, tuttavia, la funzione $f(x, y)$ è almeno di classe C^1. In tal caso, il fatto che la condizione di Lipschitz sia soddisfatta è conseguenza del teorema del valor medio e del fatto che attorno ad ogni punto (x_0, y_0) si riesce a *ritagliare* un intorno rettangolare nel quale $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sia limitata.

Se poi $f(x, y)$ è di classe C^∞, allora anche la soluzione $y(x)$ lo è.
Infatti, se $f(x, y)$ è di classe C^1, si possono derivare ambo i membri di

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

ottenendo

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) \tag{77}$$

da cui segue che $y''(x)$ è continua e quindi $y(x)$ è di classe C^2.
A questo punto, se $f(x, y)$ è di classe C^2 si può derivare di nuovo la (77) ed ottenere che $y(x)$ è di classe C^3.
Nel caso che $f(x, y)$ sia di classe C^∞, si può continuare a derivare ad oltranza, ottenendo che $y(x)$ è di classe C^n per ogni $n \in \mathbf{N}$, cioè che $y(x)$ è di classe C^∞.

93. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre svolga i problemi gli proponiamo nel capitolo successivo.
In particolare rifletta sul problema **98** che fornisce un'interessante legame tra la la teoria delle equazioni differenziali e il teorema delle funzioni implicite.

94. Lista dei problemi

93. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^5 - x^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Mostrare che $y(x)$ ha un punto di massimo relativo per $x = 1$.

94. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(y^2 + x^2\right) \sin y \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Mostrare che, finché è definita $y(x)$ è compresa tra quota 0 e quota π.

95. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^4 - x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Mostrare che $y(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale per $x = 0$.

96. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + \ln(1 + x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Determinare il polinomio di Taylor di ordine 4 di $y(x)$ centrato in $x = 0$.

97. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\left(e^y - e^{x^3}\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Dire qual è il suo ordine di infinitesimo per $x \to 0$.

98. Sia $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; (x^2 + y^2)e^{xy} = 4\right\}$ e sia $P \equiv (0, 2)$.
Mostrare che Γ, in un intorno sufficientemente piccolo del punto P, coincide con il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{2x + (x^2+y^2)y}{2y + (x^2+y^2)x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Fatto ciò dire se, in un intorno di P, Γ sta sopra o sotto alla sua retta tangente in P.

95. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 100.

Dire cos'è un'equazione differenziale, qual è il suo ordine e cosa significa che è scritta in forma normale. Dire inoltre cos'è una sua soluzione.

Domanda 101.

Enunciare il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy, nel caso di un'equazione differenziale scalare del primo ordine.

Domanda 102.

Spiegare perché la condizione di Lipschitz è sicuramente verificata quando il secondo membro è una funzione $f(x,y)$ di classe C^1.

Domanda 103.

Esibire, motivando la risposta, un problema di Cauchy la cui soluzione non sia unica.

96. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 23

A.A. 2012-2013
20 Novembre 2012
ore 9.30-11.05

97. Contenuti della lezione

La prima parte della lezione è stata dedicata a problemi sugli studi qualitativi di problemi di Cauchy, presi da quelli proposti nella lezione precedente.

Nella seconda parte, invece sono state trattate le equazioni a variabili separabili. Lo studente può trovare la spiegazione relativa a questa seconda parte nel paragrafo **17.2.1** del libro di testo.

98. Lavoro proposto per casa

Oltre a rispondere alle domande di verifica e a continuare ad esercitarsi con lo studio qualitativo dei problemi di Cauchy, lo studente risolva le equazioni a variabili separabili che gli proponiamo nel paragrafo che segue.

99. Lista dei problemi

99. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\ln x}{y^3} \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

100. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+y^3}{y^2}x^2 \\ y(0) = \sqrt[3]{1-e}. \end{cases}$$

101. Trovare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^3}{y}e^{x^2-y^2} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

102. Sia data l'equazione differenziale

$$y' = y^2 - 1. \tag{78}$$

(79) Trovare la soluzione di (78) che soddisfa la condizione $y(0) = 2$.
(80) Trovare la soluzione di (78) che soddisfa la condizione $y(0) = 1$.
(81) Trovare la soluzione di (78) che soddisfa la condizione $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

103. Trovare la soluzione $y(x)$ di
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}\cos^2 y \\ y(1) = -\dfrac{19\pi}{4}. \end{cases}$$

104. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-2y}{2xy-2x} \\ y(1) = \lambda, \end{cases}$$

nel caso in cui:
(82) $\lambda = 3$,
(83) $\lambda = 2$,
(84) $\lambda = -1$,
(85) $\lambda = 0$.

105. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = -xy\ln^3 y \\ y(0) = \lambda, \end{cases}$$
nel caso in cui:
(86) $\lambda = e$,
(87) $\lambda = 1$,
(88) $\lambda = \dfrac{1}{e}$.

106. Sia data l'equazione differenziale

(89) $$y' = -\frac{xy^2 - 3xy + 2x}{1 + x^4}.$$

(90) Trovare la soluzione di (89) che soddisfa la condizione $y(0) = 3$.
(91) Trovare la soluzione di (89) che soddisfa la condizione $y(0) = 2$.
(92) Trovare la soluzione di (89) che soddisfa la condizione $y(0) = \dfrac{3}{2}$.
(93) Trovare la soluzione di (89) che soddisfa la condizione $y(0) = 1$.

107. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{2y\sqrt{x}} \\ y(1) = \lambda, \end{cases}$$
nel caso in cui:
(94) $\lambda = 3$,
(95) $\lambda = 2$,
(96) $\lambda = -1$,
(97) $\lambda = -2$.

108. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{(y^2 - 3)\ln(y^2 - 3)}{2xy} \\ y(1) = \lambda, \end{cases}$$
nel caso in cui:
(98) $\lambda = 3$,
(99) $\lambda = 2$,
(100) $\lambda = -\dfrac{7}{4}$,
(101) $\lambda = -2$.

109. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x\left(e^{y^2} - e\right)}{ye^{y^2}} \\ y(0) = \lambda, \end{cases}$$
nel caso in cui:
(102) $\lambda = \sqrt{2}$,
(103) $\lambda = 1$,
(104) $\lambda = -1$,
(105) $\lambda = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

110. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y - 4\sqrt{y}}{x} \\ y(1) = \lambda, \end{cases}$$
nel caso in cui:
(106) $\lambda = 9$,
(107) $\lambda = 4$,
(108) $\lambda = 1$.
(109) Dire se la soluzione trovata al punto (108) è unica.

100. Lista delle domande di verifica

Domanda 104.

Dire cos'è un'equazione differenziale a variabili separabili e dire come diventa la condizione di Lipschitz per tale tipo di equazioni.

Domanda 105.

Spiegare come si trovano tutte le soluzioni di un'equazione differenziale a variabili separabili.

101. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **24**

A.A. 2012-2013
23 Novembre 2012
ore 15.00-16.45

102. Contenuti della lezione

Il problema di cui ci vogliamo occupare in questa lezione è di stabilire quanto si può prolungare la soluzione $y(x)$ di un problema di Cauchy, la cui esistenza locale è già stata stabilita grazie alla teoria sviluppata nella lezione scorsa.
Per rendere più fluida la discussione premettiamo alcune definizioni.
Per prima cosa estendiamo il concetto di condizione di Lipschitz, già dato localmente, a tutto un insieme A nel modo seguente:

Definizione 8.

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbf{R}$. Diremo che f soddisfa la condizione di Lipschitz su A se

(110) per ogni $(x_0, y_0) \in A$, esiste un intorno rettangolare $\mathcal{R}$ di (x_0, y_0), con $\mathcal{R} \subset A$, ed esiste una costante $L > 0$ tale che, comunque si prendano in $\mathcal{R}$ i punti (x, y_1) e (x, y_2), vale la disuguaglianza $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$.

Fatto ciò introduciamo il concetto di prolungamento e soluzione massimale.

Definizione 9.

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbf{R}$ soddisfacente la condizione di Lipschitz su A. Siano inoltre $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluzioni dell'equazione:

(111) $$y' = f(x, y)$$

rispettivamente sugli intervalli I_1 e I_2.
Diremo che $y_2(x)$ è un prolungamento di $y_1(x)$ se $I_1 \subset I_2$ ed inoltre $y_1(x)$ e $y_2(x)$ coicidono sull'intervallo I_1.
Diremo inoltre che una funzione $y_3(x)$, che sia soluzione di (111) sull'intervallo I_3, è una soluzione massimale, se non ha nessun altro prolungamento oltre a se stessa.

La soluzione massimale di un problema di Cauchy esiste sempre, come garantisce il seguente teorema

Teorema 16. (sui prolungamenti e le soluzioni massimali)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.
Si consideri il seguente problema di Cauchy:

(112) $$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora valgono le seguenti proprietà:

(113) se I_1 e I_2 sono due intervalli aperti contenenti x_0 e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni di (112) definite rispettivamente su I_1 e I_2, allora esse coincidono su tutto $I_1 \cap I_2$;

(114) Esiste un unico intervallo $I_{\max}$ e un unica funzione $y_{\max}(x)$ definita su $I_{\max}$ tale che $y_{\max}(x)$ è soluzione massimale di (112).

Dimostrazione del Teorema 16.

Cominciamo con la dimostrazione di (113).
Detto $I = I_1 \cap I_2$, sappiamo che I è aperto e contiene x_0 e quindi $y_1(x)$ e $y_2(x)$ coincidono almeno per $x = x_0$. Supponiamo, per assurdo che esista $x_s \in I$ tale che $y_1(x_s) \neq y_2(x_s)$.
Per fissare le idee supponiamo che $x_s > x_0$ (il caso $x_s < x_0$ è completamente analogo e il suo svolgimento viene lasciato allo studente). Consideriamo ora l'insieme V di tutti i punti, compresi tra x_0 e x_s per i quali $y_1(x)$ e $y_2(x)$ coincidono, cioè sia

$$V = \left\{x \in I \;\middle|\; x_0 \le x \le x_s \text{ e } y_1(x) = y_2(x)\right\}.$$

Tale insieme è non vuoto (perchè contiene almeno x_0), limitato (perchè contenuto in $[x_0, x_s)$), e chiuso (perché $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono continue).
Quindi V ha un massimo, che indicheremo con x_m, strettamente minore di x_s. Cioè esiste un punto x_m che è il più grande, tra i punti minori di x_s per i quali $y_1(x)$ e $y_2(x)$ coincidono.

Se dunque indichiamo con y_m il valore che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ assumono in x_m e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_m) = y_m \end{cases} \tag{115}$$

otterremo che sia $y_1(x)$ che $y_2(x)$ sono soluzioni di tale problema di Cauchy, anche se assumono valori diversi per ogni $x \in (x_m, x_s)$. Ciò significa che (115) ha due soluzioni locali distinte, in contrasto col teorema di esistenza e unicità. Abbiamo cioè ottenuto una contraddizione supponendo che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ non coincidessero su tutto l'intervallo $I_1 \cap I_2$, di conseguenza ciò non può accadere.
Ciò completa la dimostrazione di (113).
Passiamo a dimostrare (114).
Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le coppie $(y_I(x), I)$ tali che I è un intervallo contenente x_0 e $y_I(x)$ è una soluzione di (115) definita su I. Indichiamo inoltre con $I_{\max}$ l'unione di tutti gli intervalli I tali che $(y_I(x), I) \in \mathcal{F}$. Infine osserviamo che, per ogni $\overline{x} \in I_{\max}$, tutti gli $y_I(x)$ tali che $\overline{x} \in I$ assumono lo stesso valore, che indicheremo con $\overline{y}$. Definiamo dunque la funzione $y_{\max}(x)$ in modo tale che $y_{\max}(\overline{x}) = \overline{y}$. Questo per ogni $\overline{x} \in I_{\max}$.
Di conseguenza, per ogni $(y_I(x), I) \in \mathcal{F}$, $y_{\max}(x)$ ristretto a I concide con $y_I(x)$. Quindi $(y_{\max}(x), I_{\max}) \in \mathcal{F}$ e risulta il prolungamento di ogni altra $(y_I(x), I) \in \mathcal{F}$. Visto che $\mathcal{F}$ contiene tutte le soluzioni di (115) possiamo affermare che $(y_{\max}(x), I_{\max})$ è soluzione massimale di (115) ed è l'unica.

Rimane ora il problema di stabilire quanto grande è l'intervallo di esistenza massimale, in particolare dire quando la soluzione $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e quando non lo è.
Contrariamente a quanto si potrebbe pensare ad una prima analisi superficiale, il fatto che $f(x, y)$ sia definita su tutto $\mathbf{R}^2$ non basta a garantire che le soluzioni di $y' = f(x, y)$ siano definite su tutto $\mathbf{R}$, come mostra l'esempio (2) nella lezione precedente.
Per garantire la prolungabilità della soluzione $y(x)$ per tutti i valori di x per cui l'equazione ha senso servono ipotesi aggiuntive sulla $f(x, y)$, come mostra il seguente teorema:

Teorema 17. (di esistenza globale)

Siano $A = (a, b) \times \mathbf{R}$, $(x_0, y_0) \in A$, ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua e soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.
Supponiamo inoltre che $f(x, y)$ sia sublineare, cioè che soddisfi la condizione:
(116) esistono due funzioni $h(x)$ e $k(x)$, continue, non negative e definite su tutto (a, b) tali che, per ogni $(x, y) \in A$ si ha $|f(x, y)| \leq h(x)|y| + k(x)$.
Allora la soluzione massimale $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è definita su tutto (a, b).

Omettiamo la dimostrazione di tale teorema, tuttavia avvertiamo lo studente interessato che tra qualche lezione potrà costruire da solo una semplicissima dimostrazione di questo teorema, utilizzando il teorema del confronto (che vedremo presto) e il fatto che, per le equazioni differenziali lineari, si riesce a trovare una soluzione esplicita.
Vediamo invece fin da subito una prima applicazione di tale teorema con il seguente esempio:

Esempio 5.

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right). \tag{117}$$

sono prolungabili a tutto $\mathbf{R}$.
Per dimostrarlo, oltre ad osservare che $\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ è definita su tutto $\mathbf{R}^2$, bisogna anche verificare che sia sublineare.
A tale scopo verifichiamo preliminarmente che per $t \geq 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$\ln(1 + t^2) \leq t \tag{118}$$

Infatti, se consideriamo la funzione differenza $\psi(t) = t - \ln(1 + t^2)$, otteniamo

$$\psi'(t) = 1 - \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{(t - 1)^2}{1 + t^2} \geq 0,$$

da cui segue che $\psi(t)$ è sempre crescente, cosa che, combinata col fatto che $\psi(0) = 0$, implica che $\psi(t) \geq 0$ per $t \geq 0$, cioè che vale la (118) per $t \geq 0$.
A questo punto siamo in grado di verificare che $\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ è sublineare. Infatti, applicando (118) con $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + 2|xy| + y^2} = \\ &= \sqrt{\left(|x| + |y|\right)^2} = |x| + |y| = 1 \cdot |y| + |x| \end{aligned}$$

Ciò significa $\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ che soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza gliobale con $h(x) = 1$ e $k(x) = |x|$, quindi ogni soluzione $y(x)$ di (117) ha come intervallo massimale di definizione $(-\infty, +\infty)$.

Un altro teorema che ci viene in aiuto quando vogliamo stabilire fino a quando una soluzione è prolungabile è il seguente:

Teorema 18. (di prolungabilità fuori dai compatti)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$, ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua e soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.
Sia inoltre K un compatto contenente (x_0, y_0) e contenuto in A e sia (a, b) l'insieme di definizione della soluzione massimale $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Allora esistono c e d, con $a < c < d < b$, tali che per $x \in (a, c) \cup (d, b)$ il grafico di $y(x)$ sta tutto fuori da K.

Ecco un modo tipico di utilizzare il teorema **18**:

Esempio 6.

Mostrare che la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^4 - 8y}{1 + x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{119}$$

è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
A tale scopo, stavolta, non è possibile usare il teorema di esistenza globale, perché non è soddisfatta l'ipotesi di sublinearità.
Invece notiamo subito che l'equazione $y' = \dfrac{y^4 - 8y}{1 + x^2 + y^2}$ ha due soluzioni costanti: le due rette $y = 0$ e $y = 2$.
Di conseguenza, visto che la soluzione $y(x)$ di (119) ha il dato iniziale nella zona compresa tra le due soluzioni costanti, finché essa è prolungabile rimarrà confinata nella striscia $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 0 < y < 2\right\}$, perchè altrimenti verrebbe violato il teorema di unicità.
Tuttavia, grazie al teorema di prolungabilità fuori dai compatti, $y(x)$ può sempre essere prolungata fino ad uscire dal rettangolo $K = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq 2,\ -b \leq x \leq b\right\}$, per ogni $b > 0$.
Poiché però, per quanto appena affermato, $y(x)$ non può intersecare il lato superiore ed il lato inferiore di K, per essere prolungata fino ad uscirne deve necessariemente essere definita per ogno $x \in [-b, b]$. Visto che questo vale per ogni $b > 0$, ciò vuol dire che $y(x)$ è definita su tutto $\mathbf{R}$, che è quanto volevamo dimostrare.

Il metodo appena descritto è di uso molto frequente.
Il primo passo di tale metodo è di trovare un motivo per poter affermare che la soluzione $y(x)$, se esiste, rimane confinata entro certe *barriere* che stanno sopra e sotto ad una certa regione. Nel caso dell'esempio **6**, tali barriere erano costituite dalle soluzioni costanti dell'equazione differenziale.
Fatto ciò si invoca il teorema di prolungamento fuori dai compatti per affermare che $y(x)$ deve comunque poter essere prolungata fino ad uscire da ogni regione compatta, delimitata sopra e sotto dalle *barriere* prima trovate. In base a ciò si conclude che $y(x)$ può essere prolungata fino a uscire da ognuna di tali regioni *di lato* e, di conseguenza, può essere prolungata a tutto $\mathbf{R}$.

103. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre svolga i problemi gli proponiamo nel capitolo successivo: nessuno di essi è particolarmente difficile.

104. Lista dei problemi

111. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(xy) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \in \mathbf{R}$.

112. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^x + y\cos^2(xy) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \in \mathbf{R}$.

113. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x - y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \in \mathbf{R}$.

114. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy\left(e^{-x^2} - y^2\right) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \in \mathbf{R}$.

115. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\left(y^2 - y\right)^{999} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \leq 1$.

105. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 106.

Per un problema di Cauchy, dire cos'è il prolungamento di una soluzione, cos'è una soluzione massimale e spiegare perchè esiste sempre.

Domanda 107.

Enunciare il teorema di esistenza globale.

Domanda 108.

Esibire un problema di Cauchy per il quale non valga la tesi del teorema di esistenza globale, ovvero tale che, pur essendo il secondo membro $f(x, y)$ definito su tutto $\mathbf{R}^2$, la sua soluzione $y(x)$ non sia prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.

Domanda 109.

Enunciare il teorema della prolungabilità delle soluzioni fuori dai compatti.

106. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 25

A.A. 2012-2013
26 Novembre 2012
ore 11.30-13.15

107. Contenuti della lezione

Nella lezione precedente abbiamo accennato a come si può utilizzare il teorema di prolungabilità fuori dai compatti, per mostrare che la soluzione $y(x)$ di un opportuno problema di Cauchy è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
Grosso modo si trattava di trovare delle *barriere* dall'alto e dal basso che $y(x)$, finché viveva, non poteva superare. Combinando questo fatto con il teorema della prolungabilità fuori dai compatti si poteva affermare che, finché $y(x)$ era compresa tra tali *barriere*, poteva essere ulteriormente prolungata.
Nella lezione precedente le uniche *barriere* che avevamo a disposizione erano le altre soluzioni dell'equazione differenziale (in genere le soluzioni costanti), in quanto esse non potevano essere *scavalcate* da $y(x)$ a causa del teorema di unicità.
In questa lezione vogliamo dare allo studente un altro strumento per costruire *barriere*, introducendo i concetti di **soprasoluzione** e di **sottosoluzione** con la seguente definizione:

Definizione 10.

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua e soddisfacente la condizione di Lipschitz su A. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = f(x, y). \tag{120}$$

Diremo che una funzione $y(x)$ di classe C^1 su in intervallo I e il cui grafico sia contenuto in A è una **soprasoluzione** di (120) se soddisfa la condizione

$$y' \geq f(x, y)$$

per ogni $x \in I$.
Analogamente diremo che è una **sottosoluzione**, se invece soddisfa

$$y' \leq f(x, y).$$

La loro utilizzabilità come *barriere* è garantita dai due seguenti teoremi:

Teorema 19. (della soprasoluzione)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, (x_0, y_1) e (x_0, y_2) due punti di A e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.
Siano inoltre $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due funzioni di classe C^1 entrambe definite su un intervallo (a, b) contenente x_0, tali che il loro grafico sia tutto contenuto in A ed inoltre si abbia:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f(x, y_1(x)) \\ y_1(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{121}$$

e

$$\begin{cases} y_2'(x) \geq f(x, y_2(x)) \\ y_2(x_0) = y_2 \end{cases} \tag{122}$$

Allora possiamo affermare che:

(123) se $y_2 \geq y_1$ allora, per $x_0 \leq x < b$ si ha $y_2(x) \geq y_1(x)$;

(124) se $y_2 \leq y_1$ allora, per $a < x \leq x_0$ si ha $y_2(x) \leq y_1(x)$.

Teorema 20. (della sottosoluzione)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, (x_0, y_1) e (x_0, y_2) due punti di A e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.
Siano inoltre $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due funzioni di classe C^1 entrambe definite su un intervallo (a, b) contenente x_0, tali che il loro grafico sia tutto contenuto in A ed inoltre si abbia:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f(x, y_1(x)) \\ y_1(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{125}$$

e

(126) $$\begin{cases} y_2'(x) \le f(x, y_2(x)) \\ y_2(x_0) = y_2 \end{cases}$$

Allora possiamo affermare che:

(127) se $y_2 \le y_1$ allora, per $x_0 \le x < b$ si ha $y_2(x) \le y_1(x)$;

(128) se $y_2 \ge y_1$ allora, per $a < x \le x_0$ si ha $y_2(x) \ge y_1(x)$.

Detto in modo più rozzo, il teorema della soprasoluzione garantisce che una soprasoluzione, al crescere di x, può essere *scavalcata* da una soluzione solo in una direzione: passando da sopra a sotto. Infatti il teorema in questione dice proprio che, se in un punto x_0 la soluzione sta sotto alla soprasoluzione, allora, prolungando la soluzione in avanti, questa continua a stare sotto. Al contrario, se in x_0 la soluzione sta sopra, prolungandola all'indietro continua a stare sopra.
Per le sottosoluzioni succede il contrario: al crescere di x, una sottosoluzione può essere *scavalcata* da una soluzione solo passando da sotto a sopra.
A lezione è stata svolta la dimostrazione del solo punto (123) e, per giunta, solo nel caso con le disuguaglianze strette. Ometteremo quindi di riportare la dimostrazione fatta e, di conseguenza, non richiederemo allo studente di saperla.
Vogliamo invece proporgli un modo suggestivo di immaginare geometricamente soluzioni, soprasoluzioni e sottosoluzioni.
Si immagini di disegnare, in ogni punto di A, un versore con pendenza uguale a $f(x, y)$.
Allora i grafici delle soluzioni sono delle curve che, in ogni punto (x, y) per cui passano, sono tangenti a tali vettori.
Invece una curva che sia il grafico di una soprasoluzione (sottosoluzione) avrà sempre pendenza maggiore (minore) o uguale di quella data dal campo di versori.

Come esempio di applicazione dei teoremi su sopra e sottosoluzioni, a lezione è stata mostrata l'estendibilità in avanti della $y(x)$ del problema **116**: infatti la retta $y = x$ è una soprasoluzione e $y = -x$ è una sottosoluzione, quindi $y(x)$ quando viene prolungata in avanti, continua ad essere compresa tra tali rette.
Ciò significa che per *uscire* dal compatto $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| \le x,\ 1 \le x \le b\}$ deve poter essere prolungata oltre $x = b$.
Essendo questo vero per ogni $b \ge 1$, si ottiene che $y(x)$ è prolungabile fino a $+\infty$.

108. Lavoro proposto per casa

Consigliamo lo studente di terminare il problema **116** studiando anche la prolungabilità fino a $-\infty$.
Provi inoltre a fare anche il problema **117**, che è po' più semplice. Per tale problema può essere di aiuto osservare che, per l'equazione che vi compare, per ogni $x > 0$ la retta $y = 0$ è una sottosoluzione, mentre la curva $y = \sqrt[3]{x}$ è una soprasoluzione.
Per quanto riguarda il comportamento asintotico della soluzione del problema **116**, ci si può accontentare di dimostrare che essa tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$ e a $-\infty$ per $x \to +\infty$.
Tuttavia è possibile essere più precisi e dimostrare che ha per asintoto obliquo la retta $y = -x$, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.
Anche per il comportamento asintotico della soluzione del problema **117** ci si può limitare a dimostrare che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.
Anche in questo caso però è possibile essere più precisi e dimostrare che, per $x \to +\infty$, il suo grafico si *schiaccia* su quello della curva $y = \sqrt[3]{x}$.

109. Lista dei problemi

116. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Mostrare che è estendibile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne la monotonia e il comportamento asintotico.

117. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x - y^3 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Mostrare che è estendibile in avanti fino a $+\infty$ e studiarne la monotonia e il comportamento asintotico.

110. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 110.

Dire cos'è una soprasoluzione e una sottosoluzione di un'equazione differenziale.

Domanda 111.

Enunciare i teoremi della soprasoluzione e della sottosoluzione.

111. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 26

A.A. 2012-2013
27 Novembre 2012
ore 9.30-11.15

112. Contenuti della lezione

In questa lezione vogliamo presentare un modo suggestivo di riformulare i teoremi della soprasoluzione e della sottosoluzione.
Si tratta del seguente

Teorema 21. (del confronto)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, (x_0, y_1) e (x_0, y_2) due punti di A ed $f, g : A \to \mathbf{R}$ due funzioni continue soddisfacenti la condizione di Lipschitz su A. Supponiamo inoltre che per ogni $(x, y) \in A$ si abbia $f(x, y) \le g(x, y)$.
Si considerino i due problemi di Cauchy:

(129) $$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_1 \end{cases}$$

e

(130) $$\begin{cases} y'(x) = g(x, y) \\ y(x_0) = y_2 \end{cases}$$

Indichiamo con $y_1(x)$ la soluzione di (129) e con $y_2(x)$ la soluzione di (130) e sia (a, b) un intervallo contenente x_0 sul quale sia $y_1(x)$ che $y_2(x)$ siano definite.
Allora possiamo affermare che:

(131) se $y_1 \le y_2$ allora, per $x_0 \le x < b$ si ha $y_1(x) \le y_2(x)$;

(132) se $y_1 \ge y_2$ allora, per $a < x \le x_0$ si ha $y_1(x) \ge y_2(x)$.

Si noti che non c'è bisogno di dimostrarlo: basta osservare che la soluzione di (129) è una sottosoluzione per l'equazione del problema di Cauchy (130).
Tuttavia, pur trattandosi praticamente della stessa cosa, enunciata in modo un po' diverso, il suo utilizzo risulta, in un certo senso più trasparente.
Ad esempio, nel problema (118) il fatto che la soluzione $y(x)$ abbia un asintoto verticale quando la si prolunga in avanti, deriva dal fatto che, grazie al teorema del confronto, essa è minorata dalla soluzione del problema di Cauchy

(133) $$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

che è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Come lo studente può facilmente immaginare, la parte difficile sta nello scegliere opportunamente un problema di Cauchy come il (133) con il quale confrontare quello assegnato, che sia anche abbastanza semplice da poterne trovare la soluzione esplicitamente.

113. Lavoro proposto per casa

Come sempre lo studente continui a rispondere alle domande di verifica.
Inoltre è invitato ad affrontare gli studi qualitativi della lista sotto riportata, che non siano già stati trattati a lezione. L'unica domanda un po' difficile è la (139).

114. Lista dei problemi

118. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dopo aver mostrato che $y(x)$ non è estendibile né fino a $+\infty$ né fino a $-\infty$, studiarne monotonia e comportamento asintotico.

119. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

(134) Mostrare che, finché $y(x)$ è prolungabile in avanti, si ha $y(x) \geq 2x$.
(135) Dopo aver verificato che su tutto l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \geq 2x\}$ si ha $f(x, y) \geq \dfrac{3}{4} y^2$, utilizzare il teorema del confronto per mostrare che, prolungando $y(x)$ a destra, ad un certo punto si trova un asintoto verticale.

120. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

dove α è un parametro reale.
(136) Mostrare che se α è non negativo e sufficientemente piccolo allora $y(x)$ è estendibile in avanti fino a $+\infty$ e si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$.
(137) Mostrare che se α è positivo e sufficientemente grande allora esiste $x_0 > 0$ tale che $\lim\limits_{x \to x_0^-} y(x) = +\infty$.
(138) Mostrare che per ogni $\alpha \geq 0$ $y(x)$ è estendibile all'indietro fino a $-\infty$.
(139) Mostrare che esiste uno e un solo valore positivo di α per il quale $y(x)$ non ricade né nella situazione descritta nel punto (136), né in quella descritta da (137), e studiare monotonia e comportamento asintotico per $x \to +\infty$ di tale $y(x)$.
(140) Dire cosa succede per α negativo, sia prolungando in avanti che indietro.

115. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 112.

Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per i problemi di Cauchy.

116. Risposte di alcuni problemi proposti

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **27**

A.A. 2012-2013
30 Novembre 2012
ore 14.00-15.45

117. Contenuti della lezione

A lezione si è trattato delle equazioni differenziali lineari del primo ordine. Lo studente può trovare tale argomento nel paragrafo **16.1** del libro di testo.

118. Lavoro proposto per casa

Come sempre lo studente continui a rispondere alle domande di verifica.
Inoltre si eserciti a risolvere le equazioni lineari del primo ordine. Per cominciare può prendere gli esercizi **16.1** e **16.2** del libro di testo e i problemi della lista del paragrafo successivo che vanno dal **121** al **129**.
Inoltre continui ad esercitarsi negli studi qualitativi con gli esercizi che vanno **130** al **137**.

119. Lista dei problemi

121. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' + \left(2x - \dfrac{3}{x}\right) y = 2x^4 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

122. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' + \left(\dfrac{5}{x} - 3x^2\right) y = \dfrac{2e^{x^3}}{x^4} \\ y(1) = 2e. \end{cases}$$

123. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' - 2xy = \dfrac{e^{x^2}}{1 + x^2} \\ y(1) = \pi e. \end{cases}$

124. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' - \dfrac{3}{x} y = x^2 \ln x \\ y(e) = 0. \end{cases}$

125. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) y = \dfrac{6e^{x-3}}{1 + x^2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$

126. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' + \left(2x + \dfrac{2}{x}\right) y = \dfrac{e^{1-x^2}}{x^2 + x^4} \\ y\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3e^2}. \end{cases}$

127. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' + \left(1 + \dfrac{2}{x}\right) y = 1 \\ y(1) = e + 1. \end{cases}$

128. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' + \dfrac{4}{x} y = \dfrac{1}{x^4 + x^6} \\ y\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{4\pi}{27}. \end{cases}$

129. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' + \dfrac{9}{x} y = 5e^{x^5} \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

130. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x\arctan(x^2 - y) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(141) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(142) Mostrare che $y(x)$ è una funzione pari.
(143) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(144) Mostrare che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.
(145) Calcolare l'ordine di infinito di $y(x)$ per $x \to +\infty$ (facoltativo).

131. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = xy - x^3y^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(146) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne crescenza e decrescenza.
(147) Dire, motivando la risposta se $y(x)$ è una funzione pari.
(148) Mostrare che $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$.
(149) Trovare l'ordine di infinitesimo di $y(x)$ per $x \to +\infty$ (facoltativo).

132. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -xy\left(y^2 - e^{-x^2}\right) \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(150) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne crescenza e decrescenza.
(151) Dire, motivando la risposta se $y(x)$ è una funzione pari.
(152) Mostrare che $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$.
(153) Trovare l'ordine di infinitesimo di $y(x)$ per $x \to +\infty$ (facoltativo).

133. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (y^2 + x^2)\cos y \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

(154) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(155) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(156) Dire, motivando la risposta, se esistono $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ e, in caso affermativo, trovarli.

134. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (y - x)(y^2 - 2y) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(157) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(158) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(159) Dire, motivando la risposta, se esistono $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ e, in caso affermativo, trovarli.

135. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(160) Studiare la monotonia di $y(x)$ in un intorno di $x = 0$.
(161) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza è un intervallo limitato (a, b) e studiare monotonia e asintoti di $y(x)$ su (a, b).

136. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{x^2y}\sin y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(162) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(163) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(164) Dire, motivando la risposta, se esistono $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ e, in caso affermativo, trovarli.

137. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{xy}\sin y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, dire se per $x \to -\infty$ è infinitesima oppure no.

120. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 113.

Dire cos'è un'equazione differenziale lineare del primo ordine (omogenea e non omogenea) e dire come diventa la condizione di Lipschitz per tale tipo di equazioni.

Domanda 114.

Spiegare come si trovano tutte le soluzioni di un'equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea.

Domanda 115.

Spiegare perchè, quando si vuole trovare la soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea, basta trovarne una soluzione particolare, se si conosce già la soluzione generale dell'omogenea associata.

Domanda 116.

Spiegare come si trova una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, utilizzando il metodo della variazione delle costanti.

121. Risposte di alcuni problemi proposti