Analisi Matematica II

A

A.A. 2010-2011
4 Febbraio 2011

Prima Parte

1. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3-x^3y}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2. Trovare i punti stazionari di $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2y^2-2x^2-2y^2$, e studiarne la natura.
Dire poi se f ha massimo o minimo assoluto sul suo dominio.

3. Trovare, se ci sono, massimo e minimo assoluti di $f(x,y)=xe^y$, sull'insieme:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; 4\leq x^2+4y^2\leq 16\right\}.$$

4. Sia data la forma differenziale

$$\omega=y\ln(16+xy)dx+x\ln(16+xy)dy.$$

Dire se è chiusa e/o esatta nel suo dominio e, in caso affermativo, determinarne la funzione potenziale.
Detta poi $\gamma(t)=(2\cos t,\,3\sin t)$, con $0\leq t\leq\frac{3}{2}\pi$, calcolare $\int_\gamma\omega$.

Seconda Parte

5. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y^{(3)}+y''+y'+y=x^2+e^{-x}. \tag{1}$$

Trovare poi un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti tale che l'insieme di tutte le sue soluzioni contenga l'insieme di tutte le soluzioni di (1).

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases}y'=-\ln(1+xy)\\ y(0)=1.\end{cases}$$

Dire se $y(x)$ è estendibile in avanti a tutto $[0,+\infty)$ e studiarne monotonia e comportamento asintotico.
(facoltativo) Fare lo stesso all'indietro.

7. Calcolare $\int_K x+y\,dxdy$, dove:

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; 2\leq ye^{-x}\leq 3,\ 3\leq ye^{x}\leq 4\right\}.$$

8. Calcolare $\int_K x+y+z^2\,dxdydz$, dove:

$$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+4y^2+z^2\leq 16\right\}-\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; |x|\leq 1,\ |y|\leq 1,\ |z|\leq 1,\right\}.$$

Tempo: 3 ore

Analisi Matematica II

A

A.A. 2010-2011
15 Febbraio 2011

Prima Parte

9. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

10. Trovare i punti stazionari di $f(x,y) = x^2 - 2xy + \ln(x-4y)$, e studiarne la natura.
Dire poi se f ha massimo o minimo assoluto sul suo dominio.

11. Sia $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^x + \ln\left(x^3y^2\right) = 1\right\}$ e sia $P \equiv (1,1)$. Dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo trovare la retta tangente a Γ nel punto P, in caso negativo, invece, cercare comunque di descrivere come è fatto l'insieme Γ in un intorno di P.

12. Determinare (se ci sono) massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = x^2y^4z$ sull'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0\right\}.$$

Seconda Parte

13. Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x(1+y^4)(2+\arctan y^2)}{y(x^2+1)} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

e dire qual è il suo intervallo massimale di esistenza.

14. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Dire se $y(x)$ è estendibile in avanti a tutto $[0,+\infty)$ e studiarne monotonia e comportamento asintotico.
(facoltativo) Dire se è prolungabile anche all'indietro fino a $-\infty$.

15. Calcolare $\displaystyle\int_K \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove:

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4 \leq x^2+y^2 \leq 2x+2y\right\}.$$

16. Dato il cilindro

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 2(x+y),\, |z| \leq 1\right\},$$

si orienti la superficie ∂V con la normale esterna e sia Σ_+ quella parte di ∂V che sta nel semispazio $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \geq 0\right\}$.
Calcolare il flusso di

$$F(x,y,z) = \left(yz,\, xz,\, x^2-y^2+\sin(z^2-z)\right)$$

attraverso Σ_+.

Tempo: 3 ore

Analisi Matematica II

B

A.A. 2010-2011
15 Febbraio 2011

Prima Parte

17. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 3y^4}{x^2 + y^2 + xy} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

18. Trovare i punti stazionari di $f(x,y) = x^2 + 2xy + \ln(2y - x)$, e studiarne la natura.
Dire poi se f ha massimo o minimo assoluto sul suo dominio.

19. Sia $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^y + 2\ln\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right) = 1\right\}$ e sia $P \equiv (1,1)$. Dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo trovare la retta tangente a Γ nel punto P, in caso negativo, invece, cercare comunque di descrivere come è fatto l'insieme Γ in un intorno di P.

20. Determinare (se ci sono) massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = xy^3z^5$ sull'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0\right\}.$$

Seconda Parte

21. Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x(1 + y^4)(2 + \arctan y^2)}{y(x^2 + 1)} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

e dire qual è il suo intervallo massimale di esistenza.

22. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 y^4}{x^2 + y^2} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Dire se $y(x)$ è estendibile all'indietro a tutto $[0, -\infty)$ e studiarne monotonia e comportamento asintotico.
(facoltativo) Dire se è prolungabile anche in avanti fino a $+\infty$.

23. Calcolare $\displaystyle\int_K \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dxdy$, dove:

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |y| \leq x \leq x^2 + y^2 \leq 2x\right\}.$$

24. Dato il cilindro

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2(x + y),\, |z| \leq 1\right\},$$

si orienti la superficie ∂V con la normale esterna e sia Σ_+ quella parte di ∂V che sta nel semispazio $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z \geq 0\right\}$.
Calcolare il flusso di

$$F(x,y,z) = \left(y^2 + z^2,\, x^2 - z^2,\, x - y + \tan(z^2 - z)\right)$$

attraverso Σ_+.

Tempo: 3 ore

Analisi Matematica II

A

A.A. 2010-2011
5 Luglio 2011

Prima Parte

25. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^9 - y^9}{x^8 + y^8} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

poi, nel caso esista, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$, dove $\nu = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

26. Trovare i punti stazionari di $f(x,y) = \arctan(x^2 - 2y) - 3x + y$, e studiarne la natura.
Dire poi se f ha massimo o minimo assoluto sul suo dominio.

27. Determinare (se ci sono) massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = x + 2y + 4z$ sull'insieme

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; xyz \geq 1,\, x + 2y + z \leq \frac{37}{2},\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0 \right\}.$$

28. Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{9x - 7y}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{9y + 7x}{x^2 + y^2}dy$.
Dire motivando la risposta

(2) se ω è chiusa sul suo dominio;
(3) se ω è esatta sul suo dominio e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale;
(4) se ω è esatta sul semipiano $\{x > 0\}$ e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale;
(5) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (8\cos t + \cos 4t,\, 4\sin t + \sin 4t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Seconda Parte

29. Trovare tutte le soluzioni di $y'' - 6y' + 9y = e^x - e^{3x}$.

30. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^4 - x^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(6) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(7) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(8) Dire, motivando la risposta, se esistono $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x)$ e, in caso affermativo, trovarli.
(9) Determinare eventuali simmetrie del grafico di $y(x)$.

31. Calcolare

$$\int_D 12x \ln(y + 2)\, dxdy$$

dove

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2 \right\}.$$

32. Calcolare

$$\int_E \frac{z}{xy}\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z \leq x + y \leq ez,\ 2 \leq z \leq 4,\ 0 \leq x \leq ey \leq e^2 x \right\}.$$

Tempo: 3 ore

Analisi Matematica II

A

A.A. 2010-2011
11 Luglio 2011

Prima Parte

33. Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^6}{x^{10}+y^{10}+x^\alpha y^5}$, prima per $\alpha = 6$, poi $\alpha = 5$, infine (facoltativo) per $\alpha = 4$.

34. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \left(x^4+y^4\right)e^{-xy}$ e studiarne la natura.
Dire inoltre se i punti di estremo relativo trovati sono anche estremi globali o no.

35. Sia $f(x,y) = x^2y^2 + xy - 2$ e sia

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2-2xy-x-y=4\right\}.$$

(10) Trovare i punti stazionari vincolati di f su Γ.
(11) Studiare la natura dei punti trovati in (10).
(12) Trovare (se ci sono) massimo e minimo assoluto di f su Γ.

36. Dire per quali valori del parametro reale λ è chiusa la forma differenziale $\omega = \dfrac{\lambda x + ye^{xy}}{x^2+e^{xy}}dx + \dfrac{xe^{xy}}{x^2+e^{xy}}dy$.
Per tutti tali valori rispondere alle seguenti domande:
(13) se ω è esatta sul suo dominio e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale;
(14) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (t,\, \ln(3-t))$, con $0 \le t \le 2$.

Seconda Parte

37. Trovare tutte le soluzioni di $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 37e^{-3x} - 20\sin x$. Dire quali di queste sono limitate su $[0,+\infty)$.

38. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^3 - yx^2 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(15) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(16) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(17) Dire, motivando la risposta, se esistono $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ e, in caso affermativo, trovarli.

39. Calcolare

$$\int_D xy^2\,dxdy$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+9y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y\sqrt{3} \le x\right\}.$$

40. Calcolare

$$\int_E \frac{2z}{x^2y+xy^2}\,dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; 1 \le xy \le e,\ |y-x| \le 1,\ x+y \le z \le 2(x+y)\right\}.$$

Tempo: 3 ore

Analisi Matematica II

A

A.A. 2010-2011
2 Settembre 2011

Prima Parte

41. Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{14}y^6}{x^{18}+y^{18}+g(x,y)}$, nei casi: $g(x,y)=0$, $g(x,y)=x^{13}y^6$, $g(x,y)=x^{12}y^6$ e infine (facoltativo) $g(x,y)=-x^{12}y^6$.

42. Data $f(x,y)=x^4+y^4-2x^3y-2xy^3+3x^2y^2-8xy+2012$,

(18) trovare i punti stazionari di f e studiarne la natura;
(19) mostrare che f non è superiormente limitata;
(20) mostrare che f ha un minimo assoluto (facoltativo).

43. Determinare (se ci sono) massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z)=x^4y^9z^{36}$ sulla sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=1$.

44. Sia $\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2y^2+x^3+y^3-4xy^2-4x^2y-4x^2-4y^2+17xy=0\right\}$ e siano $P\equiv(3,1)$ e $Q\equiv(0,0)$. Dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo trovare la retta tangente a Γ nel punto P, in caso negativo, invece, cercare comunque di descrivere come è fatto l'insieme Γ in un intorno di P. Fare lo stesso anche per il punto Q.

Seconda Parte

45. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2xe^{x^2}\cos^2 y \\ y(0)=\lambda \end{cases}$$

Determinarne la soluzione nei casi: $\lambda=0$, $\lambda=\dfrac{\pi}{2}$, $\lambda=\pi$ e $\lambda=\dfrac{3}{2}\pi$.

46. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^3-y}{x^2+y^2+1} \\ y(0)=2. \end{cases}$$

(21) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne crescenza e decrescenza.
(22) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$.
(23) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y(x)$.

47. Calcolare

$$\int_D \frac{6}{xy(x+y)}\,dxdy$$

dove

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; 12-x\le y\le 12+x,\ 2x\le y\le 3x\right\}.$$

48. Calcolare

$$\int_E \frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

dove

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; z\ge 0,\ z^2-1\le x^2+y^2\le 2\right\}.$$

Tempo: 3 ore

Analisi Matematica II

A

A.A. 2010-2011
12 Settembre 2011

Prima Parte

49. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y^{12}}{x^8+y^{24}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

poi, nel caso esista, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$, dove $\nu = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

50. Trovare i punti stazionari di $f(x,y) = x^6 - 4x^4y^2 + 3x^2y^4 - x^5 + 4x^3y^2 - 3xy^4$, e studiarne la natura.
Dire poi se f ha massimo o minimo assoluto sul suo dominio.

51. Dati $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 + x^2y^2$ e $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 2\}$

(24) trovare massimi e minimi relativi e/o assoluti di f ristretta a ∂D;
(25) dire se i punti di estremo trovati al punto (24) rimangono di estremo anche passando da ∂D a D;
(26) dire se ci sono e, in caso affermativo trovarli, massimo e minimo assoluti di f su D.

52. Sia $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3y + xy^3 - 25xy = 0\}$ e siano $P \equiv (3,4)$ e $Q \equiv (5,0)$. Dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo trovare la retta tangente a Γ nel punto P, in caso negativo, invece, cercare comunque di descrivere come è fatto l'insieme Γ in un intorno di P. Fare lo stesso anche per il punto Q.

Seconda Parte

53. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' + \dfrac{9}{x}y = 5e^{x^5} \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

54. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^x - y^2 \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

(27) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne crescenza e decrescenza.
(28) Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.
(29) Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$.

55. Calcolare

$$\int_D \frac{1}{x^2y}\,dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y-8 \leq 2x,\ y \geq 8|x-3|\}.$$

56. Calcolare

$$\int_E \frac{x-y+9z}{4(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz$$

dove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 4 \leq x^2+y^2 \leq z \leq 2x+2y\}.$$

Tempo: 3 ore