Analisi Matematica II

A

A.A. 2011-2012
10 Dicembre 2011

Appello Straordinario sulla sola Prima Parte

1. Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x^2y^6)}{x^4+y^8+x^3y^3}$.

2. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^6+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Studiare continuità della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{per } x+y \geq 0, \\ x+5y+6 & \text{per } x+y < 0. \end{cases}$$

4. Trovare i punti stazionari di $f(x,y) = (x^2+y^2-25)(x+5-y)$, e studiarne la natura.
Dire poi se f ha massimo o minimo assoluto sul suo dominio.

5. Trovare, se ci sono, massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = x^2+y^2$, sull'insieme:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; y^2-x^2 \leq 9,\, 2x^2-y^2 \leq 7\right\}.$$

6. Determinare (se ci sono) massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = xyzw$ sull'insieme

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2+w^2 = 4\right\}.$$

7. Sia $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2e^{xy}+y = e+1\right\}$ e sia $P \equiv (1,1)$. Dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo trovare la retta tangente a Γ nel punto P, in caso negativo, invece, cercare comunque di descrivere come è fatto l'insieme Γ in un intorno di P.

8. Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{y+9x}{9x^2+4y^2}dx + \frac{4y-x}{9x^2+4y^2}dy.$$

Dire se è chiusa e/o esatta nel suo dominio.
Detta poi $\gamma(t) = (1+2\cos t, \sin t)$, con $-\frac{5}{6}\pi \leq t \leq \frac{7}{6}\pi$, calcolare $\int_\gamma \omega$.

Tempo: 3 ore

Analisi Matematica II

A

A.A. 2011-2012
9 Febbraio 2012

Prima Parte

9. Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^7+y^7}{(x^4+y^2)(x^2+y^4)}$.

10. Data $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 68x^2 - 32y^2 - 2012$,

(1) trovare i punti stazionari di f e studiarne la natura;
(2) mostrare che f non è superiormente limitata;
(3) mostrare che f ha un minimo assoluto (facoltativo).

11. Trovare, se esistono, massimo e minimo assoluti di $f(x,y,z) = xy^{16}z^{64}$ sull'insieme $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 = \dfrac{81}{64}\right\}$.

12. Dopo aver determinato per quali polinomi $p(x)$ la forma differenziale $\omega = \dfrac{e^x + p(x)e^y}{e^x + x^2e^y}dx + \dfrac{x^2e^y}{e^x + x^2e^y}dy$ risulta essere chiusa, per ciascuno di tali polinomi calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva definita da $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, con $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$.

Seconda Parte

13. Sia data l'equazione differenziale $y'' - 4y' - 5y = b(x)$.

(4) Nel caso $b(x) = 8e^x$ trovarne la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$.
(5) Nel caso $b(x) = 26\sin x$ trovarne la soluzione generale.
(6) Nel caso $b(x) = -18e^{-x}$ trovarne la soluzione generale.

14. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4y^2 + x^2y}{2 + \arctan y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(7) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile all'indietro fino a $-\infty$.
(8) Mostrare che $y(x) \to 0$ per $x \to -\infty$.
(9) Mostrare che $y(x)$ non è prolungabile in avanti fino a $+\infty$.
(10) (facoltativo) Dare una stima, più fine possibile, dell'ordine con cui $y(x) \to 0$ per $x \to -\infty$.

15. Calcolare $\displaystyle\int_K \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove:

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \ge 2y,\ 0 \le x \le 1,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\right\}.$$

16. Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{x(y+6)}{z\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz$, dove:

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1,\ (z-2)^2 \le 3(x^2+y^2),\ x \ge 0\right\}.$$

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.

Analisi Matematica II

B

A.A. 2011-2012
9 Febbraio 2012

Prima Parte

17. Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^5}{(x^4+y^6)(x^6+y^4)}$.

18. Data $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6x^2 - 2y^2 + 2012$,

(11) trovare i punti stazionari di f e studiarne la natura;
(12) mostrare che f non è superiormente limitata;
(13) mostrare che f ha un minimo assoluto (facoltativo).

19. Trovare, se esistono, massimo e minimo assoluti di $f(x,y,z) = x^{27}y^{64}z^{125}$ sull'insieme $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 = 216,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

20. Dopo aver determinato per quali polinomi $p(x)$ la forma differenziale $\omega = \dfrac{p(x)e^{x^2} + \sin y}{2e^{x^2} + x\sin y}dx + \dfrac{x\cos y}{2e^{x^2} + x\sin y}dy$ risulta essere chiusa, per ciascuno di tali polinomi calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva definita da $\gamma(t) = (\cos t,\ t)$, con $\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

Seconda Parte

21. Sia data l'equazione differenziale $y'' + 4y' - 5y = b(x)$.

(14) Nel caso $b(x) = 14e^{2x}$ trovarne la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 2$ e $y'(0) = -2$.
(15) Nel caso $b(x) = -26\cos x$ trovarne la soluzione generale.
(16) Nel caso $b(x) = 12e^x$ trovarne la soluzione generale.

22. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3y^2 + x^2y}{2 + \sin y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(17) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile all'indietro fino a $-\infty$.
(18) Mostrare che $y(x) \to 0$ per $x \to -\infty$.
(19) Mostrare che $y(x)$ non è prolungabile in avanti fino a $+\infty$.
(20) (facoltativo) Dare una stima, più fine possibile, dell'ordine con cui $y(x) \to 0$ per $x \to -\infty$.

23. Calcolare $\displaystyle\int_K \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove:

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 2y,\ x + y \leq 2,\ 0 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y\right\}.$$

24. Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{2x(3-y)}{z\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz$, dove:

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1,\ (z-2)^2 \leq 3(x^2+y^2),\ x \geq 0\right\}.$$

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.

Analisi Matematica II

A

A.A. 2011-2012
17 Febbraio 2012

Prima Parte

25. Dire se è differenziabile nell'origine la funzione $f(x,y)$ definita da:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^8y^{10}}{x^{24}+y^{12}} & \text{per } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

26. Siano $P\equiv(1,1)$ e

$$f(x,y)=\frac{x^3y+xy^3}{x^4+y^4}$$

Detto c il valore che f assume in P e detta $\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; f(x,y)=c\right\}$, dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo, trovare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P e dire da che parte si trova Γ rispetto alla tangente.

27. Siano $f(x,y,z)=x^4+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2-5x^2-y^2-4z^2+2012$ e $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1\right\}$. Trovare i punti di estremo assoluto di f su S.

28. Sia $f(x,y)=2x^3y+2xy^3+5x^2y^2-6x^2y-6xy^2+4xy-2012$.
(21) Trovare i punti stazionari di f.
(22) Studiare la natura dei punti trovati in (21).
(23) Dire se f ha massimo o minimo assoluto su tutto $\mathbf{R}^2$.

Seconda Parte

29. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\dfrac{2\sqrt{y}-2y}{x}\\ y(1)=\lambda,\end{cases}$$

nel caso in cui:
(24) $\lambda=2$,
(25) $\lambda=4$,
(26) $\lambda=\dfrac{1}{2}$.
(27) Dire se la soluzione trovata al punto (26) è unica.

30. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'=y^2-x^8\\ y(1)=1.\end{cases}$$

Mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne la monotonia e il comportamento asintotico.

31. Calcolare

$$\int_K x\ln(1+y)\,dxdy$$

dove

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\le 2,\ y\ge 0,\ x\ge y^2\right\}.$$

32. Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{xyz}{x^2+y^2}\,dxdydz$, dove:

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; 4\le x^2+y^2\le 2x+2y,\ 0\le z\le 2\right\}.$$

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.

Analisi Matematica II

B

A.A. 2011-2012
17 Febbraio 2012

Prima Parte

33. Dire se è differenziabile nell'origine la funzione $f(x,y)$ definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6y^8}{x^{20}+y^{10}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

34. Sia $f(x,y) = x^4 - y^4 - 2x^2y + 2y^3 + 2012$.
(28) Trovare i punti stazionari di f.
(29) Studiare la natura dei punti trovati in (38).
(30) Dire se f ha massimo o minimo assoluto su tutto $\mathbf{R}^2$.

35. Siano $P \equiv (1,-1)$ e

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^4+y^4}$$

Detto c il valore che f assume in P e detta $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$, dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo, trovare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P e dire (facoltativo) da che parte si trova Γ rispetto alla tangente.

36. Dopo aver determinato per quali polinomi $p(x)$ la forma differenziale $\omega = \dfrac{p(x)e^{x^2} + \sin y}{2e^{x^2} + x\sin y}dx + \dfrac{x\cos y}{2e^{x^2} + x\sin y}dy$ risulta essere chiusa, per ciascuno di tali polinomi calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva definita da $\gamma(t) = (\cos t,\, t)$, con $\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

Seconda Parte

37. Sia data l'equazione differenziale $y'' + 4y' - 5y = b(x)$.
(31) Nel caso $b(x) = 14e^{2x}$ trovarne la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 2$ e $y'(0) = -2$.
(32) Nel caso $b(x) = -26\cos x$ trovarne la soluzione generale.
(33) Nel caso $b(x) = 12e^x$ trovarne la soluzione generale.

38. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3y^2 + x^2y}{2+\sin y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(34) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile all'indietro fino a $-\infty$.
(35) Mostrare che $y(x) \to 0$ per $x \to -\infty$.
(36) Mostrare che $y(x)$ non è prolungabile in avanti fino a $+\infty$.
(37) (facoltativo) Dare una stima, più fine possibile, dell'ordine con cui $y(x) \to 0$ per $x \to -\infty$.

39. Calcolare $\displaystyle\int_K \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove:

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \geq 2y,\ x+y \leq 2,\ 0 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y\right\}.$$

40. Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{2x(3-y)}{z\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz$, dove:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1,\ (z-2)^2 \leq 3(x^2+y^2),\ x \geq 0\}.$$

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.

Analisi Matematica II

A

A.A. 2011-2012
28 Febbraio 2012

Prima Parte

41. Dire se è differenziabile nell'origine la funzione $f(x,y)$ definita da:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin^2 y^{10}}{x^4+y^{20}}+2x+y & \text{per } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

42. Siano $P\equiv(1,1)$ e

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^4+y^4}$$

Detto c il valore che f assume in P e detta $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid f(x,y)=c\}$, dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo, trovare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P e dire da che parte si trova Γ rispetto alla tangente.

43. Siano $f(x,y,z)=x^4+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2-5x^2-y^2-4z^2+2012$ e $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$. Trovare i punti di estremo assoluto di f su S.

44. Dire per quali valori dei parametri reali A e B la forma differenziale

$$\omega=\left(\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}+A\frac{y}{(x+2)^2+y^2}\right)dx+\left(-\frac{x}{x^2+(y-1)^2}+B\frac{x+2}{(x+2)^2+y^2}\right)dy$$

è esatta nel dominio $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 25\}$.

Seconda Parte

45. Trovare tutte le soluzioni di $y'''+y=e^{-x}$ che sono infinitesime per $x\to+\infty$.

46. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases}y'=\dfrac{x^2y+y^2}{\pi+x^2+y^2}\\ y(0)=1.\end{cases}$$

Mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne la monotonia e il comportamento asintotico.

47. Calcolare

$$\int_K \frac{x^2+xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

dove

$$K=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2x,\ x\geq 1\}.$$

48. Calcolare, se convergente, l'integrale improprio:

$$\int_K \frac{2y}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove

$$K=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 1,\ y^2-x^2\leq 1,\ y\geq x\geq 0\}.$$

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.

Analisi Matematica II

B

A.A. 2011-2012
17 Febbraio 2012

Prima Parte

49. Dire se è differenziabile nell'origine la funzione $f(x,y)$ definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6y^8}{x^{20}+y^{10}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

50. Sia $f(x,y) = x^4 - y^4 - 2x^2y + 2y^3 + 2012$.
(38) Trovare i punti stazionari di f.
(39) Studiare la natura dei punti trovati in (38).
(40) Dire se f ha massimo o minimo assoluto su tutto $\mathbf{R}^2$.

51. Siano $P \equiv (1,-1)$ e

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^4+y^4}$$

Detto c il valore che f assume in P e detta $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$, dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo, trovare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P e dire (facoltativo) da che parte si trova Γ rispetto alla tangente.

52. Dopo aver determinato per quali polinomi $p(x)$ la forma differenziale $\omega = \dfrac{p(x)e^{x^2} + \sin y}{2e^{x^2} + x\sin y}dx + \dfrac{x\cos y}{2e^{x^2} + x\sin y}dy$ risulta essere chiusa, per ciascuno di tali polinomi calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva definita da $\gamma(t) = (\cos t,\, t)$, con $\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

Seconda Parte

53. Sia data l'equazione differenziale $y'' + 4y' - 5y = b(x)$.
(41) Nel caso $b(x) = 14e^{2x}$ trovarne la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 2$ e $y'(0) = -2$.
(42) Nel caso $b(x) = -26\cos x$ trovarne la soluzione generale.
(43) Nel caso $b(x) = 12e^x$ trovarne la soluzione generale.

54. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3y^2 + x^2y}{2+\sin y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(44) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile all'indietro fino a $-\infty$.
(45) Mostrare che $y(x) \to 0$ per $x \to -\infty$.
(46) Mostrare che $y(x)$ non è prolungabile in avanti fino a $+\infty$.
(47) (facoltativo) Dare una stima, più fine possibile, dell'ordine con cui $y(x) \to 0$ per $x \to -\infty$.

55. Calcolare $\displaystyle\int_K \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove:

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \geq 2y,\, x+y \leq 2,\, 0 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y\right\}.$$

56. Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{2x(3-y)}{z\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz$, dove:

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1,\, (z-2)^2 \leq 3(x^2+y^2),\, x \geq 0\right\}.$$

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.

Analisi Matematica II

A

A.A. 2011-2012
2 Luglio 2012

Prima Parte

57. Sia dato il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{x^{10}+y^{12}}$.

(48) calcolarlo o mostrare che non esiste per $\alpha = 5$;
(49) calcolarlo o mostrare che non esiste per $\alpha = 6$;
(50) calcolarlo o mostrare che non esiste per $\alpha = \frac{11}{2}$;
(51) (facoltativo) più in generale, determinare l'insieme di tutti gli $\alpha > 0$ per i quali tale limite esiste.

58. Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{xy+13} + \frac{x^2+y^2}{8}$, trovarne i punti stazionari interni al dominio e studiarne la natura.
Dire poi, motivando la risposta, se f ha massimo e/o minimo assoluto in tutto il suo dominio e, in caso affermativo trovarli.

59. Data la funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2xy - 2x^2 - 2y^2 + 2012$, determinarne i punti di estremo relativo e assoluto sull'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\}$.

60. Data la forma differenziale $\omega = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}dy$ dire se è chiusa e/o esatta nel suo dominio e, nel caso sia possibile, determinarne una funzione potenziale.
Calcolare infine $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva definita da $\gamma(t) = (1+\cos t,\, 1+\sin t)$, con $-\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

Seconda Parte

61. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y^{(5)} - 2y^{(4)} - y' + 2y = b(x)$ nei casi $b(x) = e^{-2x}$, $b(x) = e^x$, $b(x) = \sin x$ e $b(x) = e^x - 2\sin x$.

62. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^8 - x^8}{x^2+y^2+2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(52) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile in avanti fino a $+\infty$.
(53) Studiarne il comportamento asintotico $x \to +\infty$.
(54) (facoltativo) Se il dato iniziale, anziché essere $y(1) = 1$ fosse stato $y(0) = \frac{1}{2}$ come sarebbe diventato lo studio della prolungabilità in avanti?

63. Calcolare $\int_K \frac{64xy\ln(1+x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)}\,dxdy$, dove $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\sqrt{2} \le x^2+y^2 \le 2x,\ x \le y \le x\sqrt{3}\right\}$.

64. Siano dati il campo vettoriale $\mathbf{F} = (5x+2z, 4z-5y, x^3y^5)$ e la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2+4y^2,\ x^2+4y^2 \le 4\}$, orientata in modo che la componente lungo la direzione dell'asse z del suo versore normale sia sempre positiva.
Calcolare il flisso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.

Analisi Matematica II

A

A.A. 2011-2012
20 Luglio 2012

Prima Parte

65. Sia data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y^5}{x^6 + y^{20}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(55) Dire se è differenziabile per $\alpha = 5$;
(56) (facoltativo) più in generale, determinare l'insieme di tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f è differenziabile.

66. Data la funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{4}\ln(1 + x^2 - y^2 - x^2y^2) - \dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{5}$, trovarne i punti stazionari e studiarne la natura.
Dire poi, motivando la risposta, se esistono eventuali punti di estremo assoluto e, in caso affermativo trovarli.

67. Data la funzione $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 2x^2 - 2y^2 - 5xy + 2012$, determinarne i punti di estremo relativo e assoluto sull'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0\}$.

68. Si consideri l'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid e^{xy} - (1 + x^2)y^2 = 0\}$. Dopo aver verificato che, in un intorno di $P \equiv (0,1)$, Γ è una curva regolare, determinare la retta r tangente a Γ nel punto P. Dire inoltre se, in un intorno di P, r lascia Γ tutta dalla stessa parte oppure no.

Seconda Parte

69. Sia data l'equazione differenziale $y' = -\dfrac{y^3 \cos x}{1 + \sin^2 x}$. Risolverla col dato iniziale $y(0) = \dfrac{1}{2}$ e indicare l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione.
Fare lo stesso nei casi in cui il dato iniziale sia $y(0) = -\dfrac{1}{2}$, $y(0) = 0$ e $y(0) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

70. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\arctan\left(y - e^{-\frac{1}{x}}\right) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(57) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile in avanti fino a $+\infty$.
(58) Studiarne la monotonia e il comportamento asintotico $x \to +\infty$.
(59) (facoltativo) Se il dato iniziale, anziché essere $y(1) = 1$ fosse stato $y(1) = \dfrac{11}{10}$ come sarebbe diventato lo studio della monotonia?

71. Calcolare $\displaystyle\int_K \sin xy \, dxdy$, dove $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \pi \leq 2xy \leq 2\pi,\ y^2 \leq x \leq 2y^2\}$.

72. Definiamo $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{|x|} \leq y \leq \dfrac{1}{2}\right\}$, e, per ogni $\epsilon > 0$, $K_\epsilon = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{|x|} \leq y \leq \dfrac{1}{2},\ y \geq \epsilon\right\}$.
Detta $f(x,y) = \dfrac{1}{y^3}\ln\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$, calcolare il limite:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{K_\epsilon} f(x,y) \, dxdy$$

Dopo aver spiegato perché, il fatto che tale limite esista finito, non basta a garantire la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_K f(x,y) \, dxdy$, studiare il carattere di tale integrale.

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.

Analisi Matematica II

A

A.A. 2011-2012
10 Settembre 2012

Prima Parte

73. Sia dato il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6y^3}{x^{10}+|y|^\alpha}$.

(60) calcolarlo o mostrare che non esiste per $\alpha = 6$;
(61) calcolarlo o mostrare che non esiste per $\alpha = 8$;
(62) calcolarlo o mostrare che non esiste per $\alpha = 7$;
(63) (facoltativo) più in generale, determinare l'insieme di tutti gli $\alpha > 0$ per i quali tale limite esiste.

74. Data la funzione $f(x,y) = xy - x^3 - y^5$, trovarne i punti stazionari interni al dominio e studiarne la natura.
Dire poi, motivando la risposta, se f ha massimo e/o minimo assoluto sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ e, in caso affermativo, trovarli.

75. Trovare, se ci sono, massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = \dfrac{1}{1+9x^2+4y^2}$, sull'insieme:

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2-6x \geq 16,\ x^2+y^2+6x \geq 16,\ 9x^2+4y^2 \leq 900\}.$$

Determinare poi altri eventuali punti di D, che siano per f di estremo relativo ma non assoluto.

76. Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{x-y}{x^2+4y^2}dx + \dfrac{x+4y}{x^2+4y^2}dy$.
Dire motivando la risposta
(64) se ω è chiusa sul suo dominio;
(65) se ω è esatta sul suo dominio e, in caso affermativo, trovarne una funzione potenziale;
(66) se ω è esatta sul semipiano $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y > 0\}$ e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale.

Seconda Parte

77. Trovare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^3}{y}e^{x^2-y^2} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

78. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{y^2} - e^{x^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(67) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile in avanti fino a $+\infty$.
(68) Studiarne il comportamento asintotico $x \to +\infty$.
(69) (facoltativo) Mostrare che se il dato iniziale, anziché essere $y(1) = 1$, fosse stato $y(0) = 2$ allora $y(x)$ non sarebbe stata prolungabile in avanti fino a $+\infty$.

79. Calcolare $\displaystyle\int_K \frac{2y}{1+x^2+y^2}\,dxdy$, dove $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2x \leq 2y\}$.

80. Calcolare $\displaystyle\int_V \frac{8xyz\cos z^2}{(1+y^2)(\sin x^2)\ln(1+z^2)}\,dxdydz$, dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq y \leq z \leq x \leq 1\}$.

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.

Analisi Matematica II

A

A.A. 2011-2012
21 Settembre 2012

Prima Parte

81. Sia dato il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5|y|^\alpha}{(x^4+y^4)(x^2+y^6)}$.

(70) calcolarlo o mostrare che non esiste per $\alpha = 2$;
(71) calcolarlo o mostrare che non esiste per $\alpha = 1$;
(72) (facoltativo) più in generale, determinare l'insieme di tutti gli $\alpha > 0$ per i quali tale limite esiste.

82. Data la funzione $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2-xy+1}$, trovarne i punti stazionari e studiarne la natura.
Dire poi, motivando la risposta, se esistono eventuali punti di estremo assoluto e, in caso affermativo trovarli.

83. Data la funzione $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$, trovare, se esistono, il suo massimo e il suo minimo assoluti sull'insieme $K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+49z^2 = 49\}$.

84. Sia $P \equiv (1,2)$ e sia

(73) $$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3ye^{x-1} + x^2e^{2-y} = 7\right\}.$$

Dopo aver verificato che $P \subset \Gamma$, dire se si tratta di un punto regolare per Γ e, in caso affermativo, determinare la retta tangente a Γ nel punto P.

Seconda Parte

85. Sia data l'equazione

(74) $$y'' - 4y = 12e^{-2x}.$$

(75) Trovare tutte le soluzioni di (74).
(76) Trovare la soluzione di (74) che passa per l'origine e, in tale punto, è tangente alla retta $y = x$.
(77) Trovare, se ne esistono, tutte le soluzioni di (74) che passano per il punto $(0,1)$ e sono infinitesime per $x \to +\infty$.

86. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^3 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(78) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile in avanti fino a $+\infty$.
(79) Studiarne il comportamento asintotico $x \to +\infty$.
(80) (facoltativo) Mostrare che se il dato iniziale, anziché essere $y(1) = 1$, fosse stato $y(0) = 2$ allora $y(x)$ non sarebbe stata prolungabile in avanti fino a $+\infty$.

87. Calcolare

$$\int_D \frac{y-x}{2y^2(x+y)}\,dxdy$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x+y \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le x\right\}.$$

88. Sia dato l'integrale improprio $\int_{\mathbf{R}^2} \frac{x+y}{1+(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$.
Per $\alpha = 2$ dire se converge e, in caso affermativo calcolarlo.
Fare lo stesso nel caso $\alpha = 1$.

Tempo: 3 ore
Punteggi: ogni problema vale 5 punti.