Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 1

A.A. 2011-2012
3 Ottobre 2011
ore 11.30-13.15

1. Contenuti della Lezione

Gli argomenti trattati a lezione sono tutti contenuti nel paragrafo **10.1** del libro di testo, ad eccezione della definizione di insieme discreto, che è la seguente: *un insieme A si dice* **discreto** *se ogni suo punto è un punto isolato.*
Lo studente rifletta sul fatto che un insieme discreto, benché costituito solo da punti isolati, può ugualmente avere dei punti di accumulazione! (si veda ad esempio l'insieme N nel problema **1**)
Per quanto riguarda tutti i concetti introdotti nel paragrafo **10.1**, si osservi che le loro definizioni non compaiono esplicitamente in tale paragrafo, che invece si limita ad affermare che esse sono formalmente identiche a quelle già introdotte per $\mathbf{R}$ ad Analisi 1.
Tuttavia, essendo queste state esplicitamente richiamate a lezione, ci si aspetta che lo studente le sappia ripetere con disinvoltura.
Un modo semplice per verificare se ha assimilato la lezione è quello di rispondere alle **domande di verifica** che trova più sotto.
Inoltre non trascuri di testare la sua effettiva comprensione svolgendo i problemi proposti.

2. Lavoro proposto per casa

Per questa lezione lo studente può limitarsi a risolvere almeno la metà dei problemi proposti e a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

3. Lista dei problemi

1. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1\},\\
B &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\},\\
C &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y\le 1\},\\
D &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\},\\
E &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x+y|\le 1\},\\
F &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x+y|> 1\},\\
G &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|< 1\},\\
H &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|+|y|\ge 1\},\\
I &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2> 1\},\\
J &= \mathbf{R}^2-\{(0,0)\},\\
K &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\ne 0,\ y\ne 0\},\\
L &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{Q},\ y\in\mathbf{R}\},\\
M &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R},\ y=\frac{1}{n},\ \text{con } n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\},\\
N &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=0,\ y=\frac{1}{n},\ \text{con } n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\},\\
O &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1, x\in\mathbf{Q}\},\\
P &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y\in\mathbf{Q}\},\\
Q &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=\frac{1}{n},\ \text{con } n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\},\\
R &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x-y=n,\ x+y=\frac{1}{m},\ \text{con } n,m\in\mathbf{Z} \text{ e } m\ne 0\right\},\\
S &= \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{m}{n},\ \text{con } n,m\in\mathbf{Z} \text{ e } n\ne 0\right\}.
\end{aligned}
$$

2. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei complementari degli insiemi elencati nel problema 1.

3. Di ciascuno degli insiemi elencati nel problema 1 e dei loro comlementari, dire, motivando la risposta, se sono aperti, chiusi, limitati, densi, discreti.

4. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1\},\\
B &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1,\ z=\frac{1}{2}\right\},\\
C &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\},\\
D &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z\le 1\},\\
E &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+z\ge 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\},\\
F &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x+y+z|\le 1\},\\
G &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x+y|+|z|\le 1\},\\
H &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x|+|y|+|z|\le 1\},\\
I &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x+y|\le 1\},\\
J &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x|+|y|\le 1\},\\
K &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid |x|\le 1\},\\
L &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2> 1\},\\
M &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1\},\\
N &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 2\},\\
O &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+z^2\le 2\},\\
P &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid xyz=0\},\\
Q &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid xyz>0\},\\
R &= \mathbf{R}^3-\{(0,0,0)\},\\
S &= \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Q},\\
T &= \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{R},\\
U &= \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Z},\\
V &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{m},\ z=\frac{p}{m},\ \text{con } n,m,p\in\mathbf{Z},\ n\ne 0 \text{ e } m\ne 0\right\},\\
W &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{m},\ z=\frac{p}{n},\ \text{con } n,m,p\in\mathbf{Z},\ n\ne 0 \text{ e } m\ne 0\right\},\\
X &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{m},\ z=\frac{p}{mn},\ \text{con } n,m,p\in\mathbf{Z},\ n\ne 0 \text{ e } m\ne 0\right\}.
\end{aligned}
$$

5. Determinare parte interna, frontiera, chiusura e insieme derivato dei complementari degli insiemi elencati nel problema 4.

6. Di ciascuno degli insiemi elencati nel problema 4 e dei loro comlementari, dire, motivando la risposta, se sono aperti, chiusi, limitati, densi, discreti.

4. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 1.

Dare la definizione di distanza euclidea in R^2 e in generale in R^n.

Domanda 2.

Dare la definizione di intorno di un punto in R^2 e in R^n.

Domanda 3.

Dato $A\subset\mathbf{R}^2$, dare la definizione di punto **interno**, **esterno**, **di frontiera**, **di accumulazione** e **isolato** di A.
Definire inoltre gli insiemi $\mathring{A}$, $\overline{A}$, ∂A e DA.
In generale fare lo stesso in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 4.

Dato $A\subset\mathbf{R}^2$, dire cosa significa che esso è **aperto**, **chiuso**, **denso**, **discreto**. **limitato**, **finito**.
In generale fare lo stesso in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 5.

Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza gli insiemi chiusi usando i punti di accumulazione o i punti di frontiera.

Domanda 6.

Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbf{R}^n$.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 2

A.A. 2011-2012
4 Ottobre 2011
ore 11.30-13.15

5. Contenuti della Lezione

Gli argomenti trattati a lezione sono tutti contenuti nei paragrafi **10.1.1** e **10.2** del libro di testo, ad eccezione dei teoremi del confronto dei limiti per le funzioni scalari, che riassumiamo nell'enunciato che segue:

Teorema 1.

Siano $A \subset \mathbf{R}^n$, $\overline{x}_0 \in \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per A ed $f, g, h : A \to \mathbf{R}$ funzioni tali che $f(\overline{x}) \leq g(\overline{x}) \leq h(\overline{x})$ per ogni $\overline{x} \in A$.

Allora possiamo affermare che:

(**a**) se $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = +\infty$ allora anche $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = +\infty$;

(**b**) se $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} h(\overline{x}) = -\infty$ allora anche $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = -\infty$;

(**c**) se $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} h(\overline{x}) = \ell$ allora anche $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = \ell$.

6. Lavoro proposto per casa

Oltre a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica, lo studente provi a risolvere alcuni dei problemi proposti, tenendo comunque conto del fatto che non riuscirà a risolverli tutti. Infatti alcuni di essi verranno svolti nella lezione successiva e presi come spunto per introdurre alcune nozioni, come ad esempio quella di limite di una restrizione e quella di o-piccolo.

7. Lista dei problemi

7. Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili dire se esiste il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ e, in caso affermativo, calcolarlo:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{x^8 y}{x^6 + y^6}, \\
f_2(x,y) &= \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}, \\
f_3(x,y) &= \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \\
f_4(x,y) &= \frac{xy}{x^2 + y^2}, \\
f_5(x,y) &= \frac{x^2 + y^2}{x^6 + y^6}, \\
f_6(x,y) &= \frac{x^{100} y^{100}}{x^2 + y^2}, \\
f_7(x,y) &= \frac{x^{100} y^{100}}{x + y}, \\
f_8(x,y) &= \frac{x^5 y^2}{x^6 + y^6}, \\
f_9(x,y) &= \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \\
f_{10}(x,y) &= \frac{x^5 y^2}{x^6 + y^8}, \\
f_{11}(x,y) &= \frac{x^2 y^5}{x^6 + y^8}, \\
f_{12}(x,y) &= \frac{x^3 y^4 + x^5 + y^5}{x^4 + y^4 + x^6 y^3}, \\
f_{13}(x,y) &= \frac{x^3 y^4}{x^6 + y^6}, \\
f_{14}(x,y) &= \frac{x^2 y^7}{x^8 + y^8}.
\end{aligned}
$$

8. Per le funzioni funzioni di 2 variabili del problema **7** dire se esiste il limite per $(x, y) \to \infty$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

9. Dire per quali valori reali non negativi di α esiste finito il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^3}{(x^{30} + y^{18})(x^{10} + y^{10})}$$

8. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 7.

Definire il concetto di **intorno di** ∞ in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 8.

Dato $\overline{x}_0 \in \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$, dire cosa significa che una proprietà $\mathcal{P}$ vale definitivamente per $\overline{x} \to \overline{x}_0$.

Domanda 9.

Dare la definizione di limite per le funzioni in più variabili, sia nel caso di funzioni a valori scalari che nel caso di funzioni a valori vettoriali.

Domanda 10.

Dire cosa significa che una funzione in più variabili è continua in un punto $\overline{x}_0$, sia nel caso si tratti di una funzione a valori scalari che nel caso si tratti di una funzione a valori vettoriali.

Domanda 11.

Enunciare il teorema sulle operazioni con i limiti per le funzioni in più variabili.

Domanda 12.

Enunciare il teorema sulla composizione di funzioni continue.

Domanda 13.

Enunciare i teoremi del confronto per i limiti di funzioni in più variabili.

Domanda 14.

Enunciare il teorema che lega il limite di una funzione a valori vettoriali al limite delle sue componenti.

9. Video on line con i problemi svolti

Come ho già avvertito a lezione, quest'anno sarà possibile per gli studenti iscritti al mio corso, richiedere lo svolgimento di parte dei problemi che propongo ad ogni lezione, in modo da trovare poi, sulla mia pagina web il filmato con la spiegazione richiesta.
Il filmato, ovviamente sarà scaricabile da chiunque, però la scelta di quali problemi farmi svolgere è riservata agli studenti del mio corso **che si sono registrati** nell'apposita form raggiungibile dalla mia pagina web:

`www.mat.uniroma2.it/~callegar`

Lo studente **registrato** che voglia indicarmi le sue preferenze deve mandarmi una mail all'indirizzo

`callegar@mat.uniroma2.it`

indicando il suo numero di matricola, e scrivendo, in ordine di preferenza, i problemi di cui vorrebbe la soluzione (non più di 6). Per indicare un problema va messo il numero progressivo con cui quel problema compare in queste dispense. Nel caso che ad un numero corrisponda non un solo problema, ma una lista, va indicato quale problema della lista si desidera.
Ogni settimana, viste tutte le richieste di studenti **registrati** che riceverò entro le 18.00 di ogni Venerdì, renderò disponibili, entro il successivo Martedì, sulla mia pagina web i filmati con le soluzioni di 5 o 6 problemi, in modo da accontentare più gente possibile.
Attenzione che per motivi di spazio non potrò lasciare i filmati on line per più di un paio di settimane, visto che dovrò fare spazio ai nuovi filmati man mano che li metterò.
Esorto quindi gli interessati a scaricarsi i filmati appena possibile.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 3

A.A. 2011-2012
6 Ottobre 2011
ore 9.30-11.15

10. Contenuti della Lezione

La lezione è stata dedicata allo svolgimento di alcuni dei problemi assegnati come lavoro per casa nella lezione precedente, alcuni dei quali sono stati usati come spunto per introdurre alcune ulteriori nozioni, utili allo svolgimento di questo tipo di problemi.

Più precisamente, del problema **7**, si è calcolato il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ delle funzioni f_1, f_2, f_{13}, f_{14}, f_4, f_9, f_6, f_7, in quest'ordine.

In particolare, per calcolare il limite di f_{13} si è dimostrato che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ vale la disuguaglianza:

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2},$$

mentre per calcolare il limite di f_{14} si è dimostrato che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, comunque si scelgano α e β positivi, vale la disuguaglianza:

$$\frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{|x|^{\alpha+\beta} + |y|^{\alpha+\beta}} \leq 1.$$

Invece, la verifica che il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ di f_4 non esiste, è stata la scusa per introdurre il seguente teorema:

Teorema 2.

Siano $A \subset \mathbf{R}^n$, $\overline{x}_0 \in \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per A, B un sottoinsieme di A che ha ancora $\overline{x}_0$ come punto di accumulazione, $\ell \in \mathbf{R}^*$ ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione che tende ad ℓ per $\overline{x} \to \overline{x}_0$.

Allora, se indichiamo con $g(\overline{x})$ la restrizione di $f(\overline{x})$ all'insieme B, anche $g(\overline{x})$ tende a ℓ per $\overline{x} \to \overline{x}_0$.

L'utilizzo di tale teorema è il seguente: visto che esso afferma che, se il limite c'è, esso coincide con il limite di ogni restrizione, allora per mostrare che il limite non c'è basterà trovare 2 restrizioni lungo le quali ci siano limiti diversi.

Tale teorema è stato utilizzato anche per mostrare che non esiste il limite di f_9. In particolare si è fatto notare che tale limite non esiste anche se il limite di f_9 ristretta ad una qualsiasi semiretta che parte dall'origine esiste e vale sempre 0.

Lo studente ricordi bene questo fatto: **non basta**, per mostrare che un limite esiste, mostrare che viene lo stesso risultato calcolandolo separatamente in tutte le direzioni.

Infine, nel caso di f_7, si è evidenziato che il limite può non esistere anche se il grado del numeratore è molto più alto di quello del denominatore: in questo caso, la causa della non esistenza del limite è legata al fatto che, in realtà, il denominatore si annulla non solo nell'origine, ma per ogni (x, y) tale che $y = -x$. Di conseguenza, si possono trovare punti arbitrariamente vicini all'origine, in cui la funzione è molto grande, ad esempio restringendosi alla curva $y = -x + x^{201}$. D'altra parte, se ci si restringe agli assi, f_7 risulta identicamente nulla. Si può quindi concludere che il limite non esiste.

Per concludere ricordiamo che, quando si è calcolato il limite di f_{14}, si è accennato a procedimenti alternativi che utilizzavano le coordinate polari. Si è inoltre accennato a cosa sono le funzioni omogenee. Su questi argomenti si tornerà nella lezione successiva.

11. Lavoro proposto per casa

Oltre a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica, lo studente dovrebbe ora essere in grado di risolvere la maggior parte dei problemi proposti a questa lezione ed alla precedente.

In prima approssimazione può comunque tralasciare i più teorici, come il problema **13** e il caso f_7 del **12**.

12. Lista dei problemi

10. Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili dire se esiste il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ e, in caso affermativo, calcolarlo:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4},\\
f_2(x,y) &= \frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^8+y^8+x^9+y^9},\\
f_3(x,y) &= \frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^8+y^8+x^9-y^9},\\
f_4(x,y) &= \frac{2x^2+3y^2+x^y}{x^2+8y^2+x^4-y^4},\\
f_5(x,y) &= \frac{1}{x^6+y^6}\ln\left(\frac{x^6+y^6+x^6y^7}{x^6+y^6}\right),\\
f_6(x,y) &= \frac{x^4y^6}{\ln\cos(x^2+y^6)}.\\
f_7(x,y) &= \frac{\ln(1+x^3)+\ln(1+y^3)}{\ln(1+x^4+y^4)}.
\end{aligned}$$

11. Detta $F(x, y) = x^{32} + y^{24}$, dire quale delle seguenti funzioni è $o(F(x, y))$ per $(x, y) \to (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x^{28},\\
f_2(x,y) &= y^{28},\\
f_3(x,y) &= x^{16}y^{12},\\
f_4(x,y) &= x^{18}y^{10},\\
f_5(x,y) &= x^{14}y^{14},\\
f_6(x,y) &= x^{34}+y^{26}.\\
f_7(x,y) &= x^{34}-y^{26}.
\end{aligned}$$

12. Detta $F(x, y) = x^{32} + y^{24}$ (come nel problema 11), dire per quali valori del parametro α (ed eventualmente anche del parametro β) le funzioni sotto elencate sono $o(F(x, y))$ per $(x, y) \to (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x^\alpha y^{12},\\
f_2(x,y) &= x^{16}y^\alpha,\\
f_3(x,y) &= x^\alpha y^{11},\\
f_4(x,y) &= x^\alpha y^{13},\\
f_5(x,y) &= x^{15}y^\alpha,\\
f_6(x,y) &= x^{17}y^\alpha.\\
f_7(x,y) &= x^\alpha y^\beta.
\end{aligned}$$

13. In generale, presa $F(x, y) = |x|^p + |y|^q$, dove p e q sono due fissate costanti positive, dire per quali valori dei parametri positivi α e β la funzione $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ è $o(F(x, y))$ per $(x, y) \to (0, 0)$.

14. Dire come sarebbero state le risposte ai problemi **11** e **12** se si fosse preso $F(x, y) = x^{32} - y^{24}$.

13. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 15.

Dimostrare che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ vale la disuguaglianza:

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Domanda 16.

Dimostrare che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, comunque si scelgano α e β positivi, vale la disuguaglianza:

$$\frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{|x|^{\alpha+\beta} + |y|^{\alpha+\beta}} \leq 1.$$

Domanda 17.

Enunciare il teorema che lega il limite di una funzione ai limiti delle sue restrizioni.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 4

A.A. 2011-2012
7 Ottobre 2011
ore 15.00-16.45

14. Contenuti della Lezione

Anche questa lezione è stata dedicata al calcolo di limiti per funzioni in 2 variabili.
Se ne è approfittato per introdurre la definizione di o-piccolo per funzioni in più variabili.
Per prima cosa, procedendo in modo analogo a quanto fatto per le funzioni in una sola variabile, si è introdotta la seguente:

Definizione 1.

Date due funzioni $f(\overline{x})$ e $g(\overline{x})$, entrambe definite su un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ avente $\overline{x}_0$ come punto di accumulazione ed entrambe infinitesime (o infinite) per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, con $g(\overline{x})$ definitivamente diversa da 0 per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, diremo che

$$f(\overline{x}) = o\left(g(\overline{x})\right) \qquad \text{per } \overline{x} \to \overline{x}_0,$$

se

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = 0$$

Tuttavia, tale definizione (che in una sola variabile funziona benissimo) presenta qualche controindicazione per le funzioni in più variabili, dove ci sono funzioni anche di tipo polinomiale, non identicamente nulle, che però si annullano su insiemi che si accumulano nell'origine (ad esempio la semplicissima funzione $f(x, y) = xy$).
In base alla definizione **1**, infatti, non è detto (come invece ci aspetterebbe che debba essere) che una funzione $f(x, y)$ che sia $o\left(x^2y^2\right)$ sia anche $o\left(x^2 + y^2\right)$, perchè, il fatto di essere $o\left(x^2y^2\right)$, non da alcun controllo sul comportamento di $f(x, y)$ sugli assi, dove il quoziente $\dfrac{f(x, y)}{x^2y^2}$ non è definito.
Per le funzioni in una sola variabile il problema non era così grave, in quanto gli infinitesimi campione del tipo x^α sono sempre diversi da 0 per $x \neq 0$.
Per le funzioni in più variabili invece, è preferibile adottare la seguente definizione:

Definizione 2.

Date due funzioni $f(\overline{x})$ e $g(\overline{x})$, entrambe definite su un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ avente $\overline{x}_0$ come punto di accumulazione ed entrambe infinitesime (o infinite) per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, diremo che

$$f(\overline{x}) = o\left(g(\overline{x})\right) \qquad \text{per } \overline{x} \to \overline{x}_0,$$

se esiste una funzione $h(\overline{x})$ definita su A e infinitesima per $\overline{x} \to \overline{x}_0$ tale che

$$f(\overline{x}) = h(\overline{x})g(\overline{x}).$$

Si noti che nei casi *buoni*, cioè quando $g(\overline{x}) \neq 0$ definitivamente per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, la definizione **2** coincide con la definizione **1**.

Una volta definito il concetto di o-piccolo, il modo di utilizzarlo per il calcolo dei limiti è descritto nel seguente:

Teorema 3.

Siano $A \subset \mathbf{R}^n$ e $\overline{x}_0 \in \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per A. Siano inoltre $F, G, f, g : A \to \mathbf{R}$ tali che, per $\overline{x} \to \overline{x}_0$, si abbia: $f(\overline{x}) = o\left(F(\overline{x})\right)$ eb) $g(\overline{x}) = o\left(G(\overline{x})\right)$.
Allora

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{F(\overline{x}) + f(\overline{x})}{G(\overline{x}) + g(\overline{x})} = \lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{F(\overline{x})}{G(\overline{x})}.$$

A fine lezione si è invece richiamato agli studenti la possibilità di calcolare i limiti passando in coordinate polari nel caso che la funzione sia omogenea, sottolineando però il fatto che il limite che si ottiene va calcolato per $\rho \to 0^+$ ma **uniformemente in** θ, non solo per ogni fissato θ. Nella pratica, quando $f(x, y)$ è una funzione omogenea, il fatto che il passaggio al limite sia fatto uniformemente in θ equivale a dire che, una volta scritto:

$$f(x, y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = G(\rho) \cdot H(\theta)$$

la funzione $H(\theta)$ è limitata e la funzione $G(\rho)$ tende a 0 per $\rho \to 0^+$.

15. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Per quanto riguarda lo svolgimento dei problemi, oltre alla lista di problemi proposti qui sotto, può affrontare anche quelli assegnati nell'esercizio **10.12** a pagina 290 del libro di testo.

16. Lista dei problemi

15. Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili dire se esiste il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ e, in caso affermativo, calcolarlo:

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - 2|xy| + |y|}{x^2 + |y|},$$
$$f_2(x, y) = \frac{\sqrt{|x| + |y|} - \sqrt{|xy|}}{x^2 + |y| - \sin xy},$$
$$f_3(x, y) = \frac{x\sqrt[3]{x} + y\sqrt[3]{y}}{x^2 + |y| + y(x + y)},$$
$$f_4(x, y) = \frac{x\sin(xy^2)}{x^2 - xy^3 + y^4},$$
$$f_5(x, y) = \frac{x\sin(xy^2)}{x^2 - xy^2 + y^4},$$
$$f_6(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{x^2 - xy^2 + y^4},$$
$$f_7(x, y) = \frac{x\sin(xy^2)}{x^2 - 2xy^2 + y^4}.$$

16. Per quali valori di α esiste finito il limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^6 + y^6}{x^4 + y^4 - |xy|^\alpha}.$$

17. Provare a passare in coordinate polari per calcolare il limiti di f_6 ed f_7 del problema **7** e spiegare cosa succede di diverso nei 2 casi.

17. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 18.

Dire cosa significa che f è o-piccolo di g nel caso di funzioni in più variabili. Spiegare inoltre perchè la definizione è formalmente un po' diversa da quella data per le funzioni in una sola variabile.

Domanda 19.

Enunciare il teorema che permette di semplificare il calcolo dei limiti di funzioni in più variabili, grazie al concetto di o-piccolo.

Domanda 20.

Spiegare cosa significa la locuzione: *"limite per $\rho \to 0^+$ uniformemente in θ"*.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 5

A.A. 2011-2012
13 Ottobre 2011
ore 9.30-11.15

18. Contenuti della Lezione

In questa lezione si è introdotto il concetto di successione a valori in $\mathbf{R}^n$, sviluppando quel minimo di teoria necessario a enunciare e dimostrare i principali teoremi relativi alle funzioni continue su insiemi compatti.
Più precisamente gli argomenti della lezione sono quelli listati (senza dimostrazione) nel paragrafo **10.2.1** del libro di testo.
Per comodità dello studente aggiungiamo qui sotto, con le dimostrazioni, i teoremi che nel libro non sono dimostrati:

Teorema 4.

Un insieme A contenuto in $\mathbf{R}^n$ è chiuso se e solo se, comunque si prenda una successione a valori in A, se essa converge allora il suo limite è ancora contenuto in A.

La seconda modifica è l'aggiunta della dimostrazione del seguente teorema che caratterizza gli insiemi compatti:

Teorema 5.

Un insieme A contenuto in $\mathbf{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione del Teorema 5.

Per prima cosa mostriamo che se un insieme A non è limitato, allora non può essere compatto.
Infatti, dal fatto che non è limitato segue che, per quanto sia grande il numero naturale n, la palla centrata nell'origine e di raggio n non può contenere tutto l'insieme.
Ciò sognifica che, per ogni $n \in \mathbf{N}$ è possibile prendere un punto, che indicheremo con $\overline{a}_n$, che appartiene ad A ma non alla palla di raggio n centrata nell'origine.
Per come è definita, la successione $(\overline{a}_n)$ tende (ovviamente) a ∞. Di conseguenza tendono ad ∞ anche tutte le sue sottosuccessioni.
Ciò significa che $(\overline{a}_n)$ è una successione a valori in A dalla quale non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente ad un punto di A.
Quindi A non può essere compatto.
Mostriamo ora che, anche quando un insieme A non è chiuso, non può essere compatto.
Infatti, se A non è chiuso, allora esiste un punto $\overline{x}_0$ che è di accumulazione per A, ma che non appartiene ad A. Basterà quindi prendere una successione $(\overline{a}_n)$ di punti di A che tende ad $\overline{x}_0$ ed essa sarà proprio una successione a valori in A dalla quale non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente ad un punto di A, visto che tutte le sottosuccessioni di $(\overline{a}_n)$ continuano a tendere ad $\overline{x}_0$, che non appartiene ad A.
Quindi, anche quando A non è chiuso, non può essere compatto.
Possiamo quindi concludere che se un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ è compatto, allora è necessariamente chiuso e limitato.
Mostriamo ora che vale anche il viceversa, cioè che se $A \subset \mathbf{R}^n$ è chiuso e limitato, allora è necessariamente compatto.
Infatti, comunque si prenda una successione $(\overline{a}_n)$ a valori in A, se la sua immagine è un insieme finito di punti, allora essa ha una sottosuccessione costante, che quindi è (banalmente) convergente ad un punto di A. Se invece l'immagine di $(\overline{a}_n)$ è un insieme infinito, grazie alla limitatezza di A e al teorema di Bolzano-Weierstrass, possiamo affermare che i punti dell'immagine di $(\overline{a}_n)$ hanno un punto di accumulazione $\overline{x}_0$, quindi è possibile estrarre da $(\overline{a}_n)$ una sottosuccessione convergente ad $\overline{x}_0$. Inoltre, essendo A un insieme chiuso, si ha che $\overline{x}_0 \in A$.
Ciò dimostra che, comunque si sia presa una successione $(\overline{a}_n)$ a valori in $A \subset \mathbf{R}^n$, se A è chiuso e limitato allora è sempre possibile estrarre da A una sottosuccessione convergente ad un punto che sta ancora dentro A. Ciò significa che A è compatto.
Quindi abbiamo dimostrato che, se A è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^n$, allora è necessariamente compatto.
Ciò completa la dimostrazione.

19. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

Per quanto riguarda lo svolgimento dei problemi, oltre alla lista di problemi proposti qui sotto, può affrontare anche quelli assegnati nell'esercizio **10.6** a pagina 279 del libro di testo.

20. Lista dei problemi

18. Dire se sono compatti gli insiemi elencati nei problemi **1** e **4**.

19. Dire se esistono i seguenti limiti di successioni in $\mathbf{R}^2$ e, in caso affermativo, calcolarli:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\cos n, \frac{1}{n}\sin n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}, \sin n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}(\cos n, \sin n),$$
$$\lim_{n\to+\infty}(n, \sin n),$$
$$\lim_{n\to+\infty}(n\cos n, n\sin n),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cos n, \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\sin n\right).$$

21. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 21.

Dare la definizione di successione a valori in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 22.

Dare la definizione di limite per una successione a valori in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 23.

Spiegare che relazione c'è tra il limite di una successione in $\mathbf{R}^n$ e il limite delle sue componenti.

Domanda 24.

Dare la definizione di successione di Cauchy a valori in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 25.

Enunciare il teorema che caratterizza le successioni di Cauchy in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 26.

Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza in $\mathbf{R}^n$ gli insiemi chiusi utilizzando le successioni.

Domanda 27.

Dare, in $\mathbf{R}^n$, la definizione di insieme compatto.

Domanda 28.

Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza gli insiemi compatti in $\mathbf{R}^n$.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 6

A.A. 2011-2012
14 Ottobre 2011
ore 15.00-16.45

22. Contenuti della Lezione

Tutti gli argomenti trattati in questa lezione sono contenuti nei paragrafi **10.2.2**, **10.2.3** e **10.3.1** del libro di testo.
Per completezza riportiamo qui di seguito, per completezza, alcuni dei teoremi che nel libro di testo non sono dimostrati:

Teorema 6. (Weierstrass)

Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ un insieme compatto e sia $f : K \to \mathbf{R}^m$ una funzione continua. Allora anche $f(K)$ è un insieme compatto.

Dimostrazione del Teorema 6.

Vogliamo mostrare che $f(K)$ è compatto, cioè che se prendiamo una qualsiasi successione $(\overline{b}_n)$ a valori in $f(K)$ è sempre possibile estrarre da essa una sottosuccessione convergente ad un punto di $f(K)$.
A tale scopo cominciamo con l'osservare che, comunque si sia presa $(\overline{b}_n)$ in $f(K)$, si può sempre prendere $(\overline{a}_n)$ in K tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si abbia

$$f(\overline{a}_n) = (\overline{b}_n). \tag{1}$$

Ma poiché K è compatto, è possibile estrarre una sottosuccessione $(\overline{a}_{n_k})$ di $(\overline{a}_n)$ tale che, per $k \to +\infty$ si abbia

$$\overline{a}_{n_k} \to \overline{\ell} \in K. \tag{2}$$

Se ora indichiamo con $(\overline{b}_{n_k})$ la sottosuccessione di $(\overline{b}_n)$, che è immagine di $(\overline{a}_{n_k})$ tramite f, si ha:

$$\lim_{k\to+\infty} \overline{b}_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} f(\overline{a}_{n_k}) = f(\overline{\ell}) \in f(K), \tag{3}$$

dove nella seconda uguaglianza si è ricordato che vale (2), che f è continua e si è applicato il teorema ponte.
Siamo quindi riusciti a mostrare che, comunque si fosse scelta $(\overline{b}_n)$ in K è sempre possibile estrarre da essa la sottosuccessione $(\overline{b}_{n_k})$ che converge ancora ad un punto di $f(K)$.
Ciò dimostra che $f(K)$ è compatto.

Teorema 7.

Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ un insieme connesso per archi e sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ una funzione continua. Allora anche $f(A)$ è un insieme connesso per archi.

Dimostrazione del Teorema 7.

Vogliamo mostrare che $f(A)$ è connesso per archi, cioè che se prendiamo due punti qualsiasi $\overline{y}_1$ e $\overline{y}_2$ appartenenti ad $f(A)$, allora è sempre possibile trovare una curva $\varphi : [a, b] \to f(A)$ continua e tale che $\varphi(a) = \overline{y}_1$ e $\varphi(b) = \overline{y}_2$.
A tale scopo osserviamo che, comunque siano scelti $\overline{y}_1$ e $\overline{y}_2$ in $f(A)$, possiamo sempre prendere $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ in A tali che

$$f(\overline{x}_1) = \overline{y}_1 \quad \text{e} \quad f(\overline{x}_2) = \overline{y}_2.$$

Ma poiché, per ipotesi, A è connesso per archi, sappiamo che è possibile trovare una curva $\psi : [a, b] \to A$ continua e tale che $\psi(a) = \overline{x}_1$ e $\psi(b) = \overline{x}_2$.
Di conseguenza, essendo f continua, se definiamo $\varphi = f \circ \psi$, otterremo che φ ha proprio le proprietà richieste, cioè è continua (in quanto composizione di funzioni continue), ha il sostegno contenuto in $f(A)$ e manda a in $\overline{y}_1$ e b in $\overline{y}_2$.
Ciò completa la dimostrazione che $f(A)$ è connesso per archi.

Con questo teorema si conclude la parte dedicata a limiti e continuità per funzioni in più variabili.
Lo studente non trascuri di leggere anche quei paragrafi del capitolo **10** del libro di testo che non sono stati esplicitamente citati: essi contengono esempi e argomentazioni assimilabili a quelle sviluppate nelle lezioni dedicate alla soluzione dei problemi, quindi lo studente dovrebbe essere perfettamente in grado di comprenderli.

A fine lezione sono stati svolti alcuni esercizi sulle funzioni continue, tra cui il problema **22** e il punto 2 del problema **23**

23. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica e risolvendo i problemi proposti.

24. Lista dei problemi

20. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2y + xy^2 + y^5 & \text{per } y \le 1 \\ x^2 + 4xy^2 - \dfrac{1}{y} & \text{per } y > 1. \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x^4 - y^4 & \text{per } x^2 + y^2 \ge 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}xy & \text{per } x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \ln(1 + xy) & \text{per } xy \ge 0 \\ \dfrac{y}{x} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

21. Sia data la funzione $f(t) = t\sqrt{t}$, definita per ogni $t \in A = [0, +\infty)$.
La funzione

$$F(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

è definita per ogni $(x, y) \in A \times A$, con $x \ne y$.
Dire se F è estendibile con continuità a tutto l' insieme $A \times A$ e in caso affermativo determinare il suo valore nei punti di $A \times A$ tali che $x = y$.

22. Come il problema **21**, ma con $f(t) = \ln t$ e prendendo come insieme A il dominio di $f(t)$.

23. Svolgere il problema **22** anche prendendo al posto di $f(t)$ ciascuna delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin t, \\ f_2(t) &= t^2, \\ f_3(t) &= \sqrt{t}, \\ f_4(t) &= \sqrt[3]{t}, \\ f_5(t) &= \begin{cases} t^2 \sin \dfrac{1}{t} & \text{per } t \ne 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

25. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 29.

Dato $A \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}$ e $\overline{x} \in A$, dire cosa significa che f è continua in $\overline{x}$ e che f è continua su A.

Domanda 30.

Enunciare il teorema ponte per le funzioni in più variabili.

Domanda 31.

Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass per le funzioni in più variabili.

Domanda 32.

Dare delle condizioni sufficienti affinché l'inversa di una funzione (in più variabili) continua sia continua.

Domanda 33.

Dare la definizione di curva continua e dire cos'è il suo sostegno.

Domanda 34.

Dare la definizione di insieme connesso per archi, in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 35.

Enunciare e dimostrare il teorema che generalizza alle funzioni in più variabili il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 7

A.A. 2011-2012
17 Ottobre 2011
ore 11.30-13.15

26. Contenuti della Lezione

In questa lezione si è iniziata la parte del calcolo differenziale per le funzioni in più variabili.

Gli argomenti svolti sono quelli del paragrafo **11.1** e della parte del paragrafo **11.2** che va dall'inizio fino al teorema **11.1**.

27. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

Per quanto riguarda lo svolgimento dei problemi proposti, tenga presente che i più semplici sono i problemi **26**, **27** e **28**, che richiedono solo di saper svolgere dei calcoli, mentre il più complesso è il **25**.

28. Lista dei problemi

24. Per ciascuna delle seguenti funzioni studiare nell'origine continuità, derivabilità e differenziabilità. Dire inoltre se è vero che per ogni versore ν si ha $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0,0) = <\nabla f(0,0), \nu>$.

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

25. Studiare la differenziabilità della funzioni definite nei problemi **21**, **22** e **23**.

26. Calcolare le derivate parziali fuori dall'origine per le funzioni dell'esercizio **24**.

27. Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili calcolare, quando è possibile, le due derivate parziali. Calcolare inoltre, quando è possibile, la derivata direzionale nel punto $(1,1)$ nella direzione $\nu = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e il piano tangente nel punto $(1,1)$.

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) =& x^2y^5 + x^5 + y^7,\\
f_2(x,y) =& \ln(xy),\\
f_3(x,y) =&, e^{xy}\\
f_4(x,y) =& \sin(x^2 - y^2),\\
f_5(x,y) =& (xy)^2,\\
f_6(x,y) =& e^{\arctan\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)},\\
f_7(x,y) =& x^y + y^x.
\end{aligned}$$

28. Per le funzioni seguenti funzioni di 3 variabili calcolare, quando è possibile, le tre derivate parziali. Calcolare inoltre, quando è possibile, la derivata direzionale nel punto $(1,1,1)$ nella direzione $\nu = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e il piano tangente nel punto $(1,1,1)$.

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z) =& x^2y^4z + x^2z^3 + yz^4,\\
f_2(x,y,z) =& \ln(xyz),\\
f_3(x,y,z) =&, e^{x^2+y^2+z^2}\\
f_4(x,y,z) =& \sqrt{xyz},\\
f_5(x,y,z) =& (xyz)^2,\\
f_6(x,y,z) =& x^y + y^z + z^x,\\
f_7(x,y,z) =& x^{y^z}.
\end{aligned}$$

29. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 36.

Dare la definizione di derivata parziale e derivata direzionale per una funzione in più variabili, a valori scalari.

Domanda 37.

Mostrare, mediante l'opportuno controesempio, che la derivabilità di una funzione in più variabili in un punto, anche in ogni direzione, non basta a garantire la continuità della funzione in quel punto.

Domanda 38.

Dare la definizione di differenziabilità e di piano tangente per le funzioni in più variabili a valori scalari.

Domanda 39.

Enunciare e dimostrare il teorema che lega la differenziabilità alla continuità ed alla derivabilità in ogni direzione.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **8**

A.A. 2011-2012
18 Ottobre 2011
ore 11.30-13.15

30. Contenuti della Lezione

La prima parte di questa lezione è stata dedicata a completare il paragrafo **11.2** del libro di testo, aggiungendo però anche la dimostrazione del teorema del differenziale totale che, non essendo riportata nel libro di testo, riportiamo qui di seguito per completezza.
Per una maggior semplicità enunciamo e dimostriamo tale teorema per le funzioni in 2 variabili. La dimostrazione nel caso di n variabili è del tutto analoga, anche se più pesante dal punto di vista notazionale.

Teorema 8.

Siano $A \subset \mathbf{R}^2$, (x_0, y_0) un punto interno ad A ed f una funzione scalare definita su A. Si supponga inoltre che esista un intorno $\mathcal{U}$ di (x_0, y_0) tale che $f_x(x,y)$ ed $f_y(x,y)$ esistano per ogni $(x,y) \in \mathcal{U}$ e si supponga infine che f_x ed f_y siano continue in (x_0, y_0).
Allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

Dimostrazione del Teorema 8.

Vogliamo dimostrare che si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0. \tag{4}$$

A tale scopo osserviamo che se $\mathcal{U}$ è un intorno sferico di (x_0, y_0), se (x,y) sta in $\mathcal{U}$, allora stanno in $\mathcal{U}$ anche (x_0, y) e i 2 segmenti che lo congiungono con (x_0, y_0) e (x, y).
Di conseguenza possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
f(x,y) - f(x_0,y_0) &= f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = \\
&= f_x(\xi,y)(x-x_0) + f_y(x_0,\eta)(y-y_0),
\end{aligned} \tag{5}$$

per opportuni ξ e η con ξ compreso tra x e x_0 ed η compreso tra y e y_0.
Questo perché si è applicato il teorema di Lagrange alle funzioni $f(x,y)$ e $f(x_0,y)$, la prima vista come funzione della sola variabile x per ogni fissato y, la seconda vista come funzione della variabile y.
Grazie a (5) si ottiene

$$\begin{aligned}
& f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = \\
&\quad = f_x(\xi,y)(x-x_0) + f_y(x_0,\eta)(y-y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0), \\
&\quad = \left(f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)\right)(x-x_0) + \left(f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)\right)(y-y_0).
\end{aligned} \tag{6}$$

Di conseguenza si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \\
&= \frac{\left(f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)\right)(x-x_0) + \left(f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)\right)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \\
&= \left(f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)\right) \cdot \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} + \\
&\qquad + \left(f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)\right) \cdot \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Notiamo però che sia $\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$ che $\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$ sono limitate perchè il mumeratore ha valore assoluto minore del denominatore.
Inoltre dalla continuità di f_x e f_y nel punto (x_0, y_0) segue che sia $f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0)$ che $f_y(x_0, \eta) - f_y(x_0, y_0)$ sono infinitesime per $(x,y) \to (x_0, y_0)$
Combinando questi due fatti con la (7), possiamo affermare che la (4) è vera.
Ciò completa la dimostrazione.

Nella seconda parte della lezione sono stati svolti alcuni problemi assegnati nella lezione precedente, relativi allo studio della regolarità di una funzione in più variabili.
In particolare è stata studiata la regolarità della funzione f_3 del problema **24**, allo scopo di evidenziare che la formula per calcolare la derivata direzionale utilizzando il gradiente, può dare un risultato errato se la funzione non è differenziabile.

31. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre svolga i problemi 1, 3 e 9 alle pagine 44 e 45 dell'eserciziario.

32. Lista dei problemi

29. Calcolare $G'(t)$ dove $G(t) = F(\gamma(t))$, con $F(x,y) = xy^2$ e $\gamma(t) = \left(e^t, e^{t^2}\right)$.

30. Come il problema **29**, ma con $F(x,y) = x^2 + y^2$ e $\gamma(t) = \left(\sin(e^t), \cos(e^t)\right)$.

31. Come il problema **29**, ma con $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ e $\gamma(t) = \left(\sin t, \cos t, e^t\right)$.

32. Come il problema **29**, ma con $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ e $\gamma(t) = ((\cos 2t)(\cos t), (\cos 2t)(\sin t), \sin 2t)$.

33. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 40.

Enunciare e dimostrare il teorema relativo alla derivabilità di una funzione del tipo $F(\gamma(t))$, dove F è una funzione scalare di n variabili e γ è una funzione di una variabile a valori in R^n.

Domanda 41.

Enunciare una possibile generalizzazione del teorema del valor medio per le funzioni in più variabili e dimostrarla.

Domanda 42.

Enunciare e dimostrare il teorema del differenziale totale.

Domanda 43.

Dare la definizione di funzione di classe C^1.

Domanda 44.

Dire, per le funzioni in più variabili, che relazione c'è tra l'essere continue, derivabili, differenziabili e di classe C^1, motivando le risposte con le opportune dimostrazioni o con gli opportuni controesempi.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 9

A.A. 2011-2012
21 Ottobre 2011
ore 15.00-16.45

34. Contenuti della Lezione

Gli argomenti trattati in questa lezione sono tutti contenuti nel paragrafo **11.3** del libro di testo, ad eccezione della dimostrazione del teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione.
Per completezza riportiamo quindi qui di seguito l'enunciato e la dimostrazione di tale teorema nel caso delle funzioni in 2 variabili, così come è stata fatta a lezione.
La discussione risulta più agevole premettendo il seguente lemma

Lemma 9.

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$ ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile 2 volte. Siano inoltre (x_0, y_0) e (x_1, y_1) due punti di A tali che tutto il rettangolo $\mathcal{Q}$ di vertici (x_0, y_0), (x_0, y_1), (x_1, y_1) e (x_1, y_0) sia contenuto in A.
Allora esistono due punti (ξ, η) e (λ, μ), interni a $\mathcal{Q}$, tali che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{f(x_1,y_1) - f(x_1,y_0) - f(x_0,y_1) + f(x_0,y_0)}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\lambda, \mu).$$

Dimostrazione del Lemma 9.

Per cominciare mostriamo che esiste un punto (ξ, η), interno a $\mathcal{Q}$, tale che

$$\frac{f(x_1,y_1) - f(x_1,y_0) - f(x_0,y_1) + f(x_0,y_0)}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta). \tag{8}$$

A tale scopo basta osservare che:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_1,y_1) - f(x_1,y_0) - f(x_0,y_1) + f(x_0,y_0)}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} = \\ &= \frac{1}{(y_1 - y_0)} \cdot \frac{(f(x_1,y_1) - f(x_1,y_0)) - (f(x_0,y_1) - f(x_0,y_0))}{(x_1 - x_0)} = \\ &= \frac{1}{(y_1 - y_0)} \cdot \frac{G(x_1) - G(x_0)}{(x_1 - x_0)}, \end{aligned} \tag{9}$$

dove abbiamo usato la notazione:

$$G(x) = f(x, y_1) - f(x, y_0).$$

Si noti che, per x compreso tra x_0 e x_1 (estremi inclusi), $G(x)$ è continua e derivabile, in quanto tale è la funzione $f(x,y)$ vista come funzione della variabile x per ogni fissato y.
Inoltre

$$G'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0).$$

Di conseguenza, se applichiamo il teorema di lagrange alla funzione $G(x)$ sull'intervallo di estremi x_0 e x_1, otteniamo che esiste ξ, strettamente compreso tra x_0 e x_1, tale che

$$\frac{G(x_1) - G(x_0)}{(x_1 - x_0)} = G'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0).$$

Quindi la (9) diventa

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_1,y_1) - f(x_1,y_0) - f(x_0,y_1) + f(x_0,y_0)}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \\ &= \frac{1}{(y_1 - y_0)} G'(\xi) = \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)}{(y_1 - y_0)} = \\ &= \frac{H(y_1) - H(y_0)}{(y_1 - y_0)} \end{aligned} \tag{10}$$

dove abbiamo usato la notazione:

$$H(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y).$$

Si noti che, per y compreso tra y_0 e y_1 (estremi inclusi), $H(y)$ è continua e derivabile, in quanto tale è la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ vista come funzione della variabile y per ogni fissato x.
Inoltre

$$H'(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, y).$$

Di conseguenza, se applichiamo il teorema di lagrange alla funzione $H(y)$ sull'intervallo di estremi y_0 e y_1, otteniamo che esiste η, strettamente compreso tra y_0 e y_1, tale che

$$\frac{H(y_1)-H(y_0)}{(y_1-y_0)} = H'(\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta). \tag{11}$$

Sostituendo la (11) nella (10) si ottiene dunque la (8).
In modo del tutto analogo si può dimostrare che esiste un punto (λ, μ), interno a $\mathcal{Q}$, tale che

$$\frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)-f(x_0,y_1)+f(x_0,y_0)}{(x_1-x_0)(y_1-y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\lambda, \mu),$$

completando così la dimostrazione.

`Teorema 10.`

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di A ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile 2 volte su A tale che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ siano continue in (x_0, y_0).
Allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$.

`Dimostrazione del Teorema 10.`

Osserviamo che se $|t|$ è sufficientemente piccolo, tutto il quadrato $\mathcal{Q}$ di vertici (x_0, y_0), (x_0+t, y_0), (x_0, y_0+t) e (x_0+t, y_0+t) è contenuto in A.
Di conseguenza, applicando il Lemma 9, otteniamo che esistono due punti (ξ, η) e (λ, μ), interni a $\mathcal{Q}$, tali che
(12)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) = \frac{f(x_0+t,y_0+t)-f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0+t)+f(x_0,y_0)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\lambda,\mu)$$

Si noti che, se $t \to 0$, allora (ξ, η) e (λ, μ) tendono a (x_0, y_0).
Di conseguenza, dalla prima delle due uguaglianze di (12) e dal fatto che $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ è continua in (x_0, y_0) segue che

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0+t)-f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0+t)+f(x_0,y_0)}{t^2} = \\
&= \lim_{(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0).
\end{aligned} \tag{13}$$

In modo del tutto analogo, dalla seconda delle due uguaglianze di (12) e dal fatto che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ è continua in (x_0, y_0) segue che

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0+t)-f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0+t)+f(x_0,y_0)}{t^2} = \\
&= \lim_{(\lambda,\mu)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\lambda,\mu) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0).
\end{aligned} \tag{14}$$

Di conseguenza, per l'unicità del limite, da (13) e (14) segue che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0),$$

che è quanto volevamo dimostrare.

35. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica e svolgendo i problemi proposti.
Tenga presente che il problema **37** è più difficile.

36. Lista dei problemi

`33.` Per le funzioni seguenti funzioni di 2 variabili calcolare la matrice Hessiana nel generico punto (x,y). Calcolarne poi $\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}$ nel punto $(1,-1)$, dove $\nu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^3y^4 + xy^8 + y^5, \\
g(x,y) &= e^{x^3y^2}, \\
h(x,y) &= x^y.
\end{aligned}$$

`34.` Per le funzioni seguenti funzioni di 3 variabili calcolare la matrice Hessiana nel generico punto (x,y,z). Calcolarne poi $\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}$ nel punto $(1,1,1)$, dove $\nu = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^4 + y^4 + z^4 + xyz, \\
g(x,y,z) &= \arctan(x^2+y^2+z^2), \\
h(x,y,z) &= x^{yz}.
\end{aligned}$$

`35.` Per le funzioni seguenti funzioni di 4 variabili calcolare la matrice Hessiana nel generico punto (x,y,z,w). Calcolarne poi $\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}$ nel punto $(1,1,-1,-1)$, dove $\nu = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= x^3yz + xyw^4 + zw, \\
g(x,y,z,w) &= \ln(xe^z + ye^w), \\
h(x,y,z,w) &= (xy)^{zw}.
\end{aligned}$$

`36.` Dire, motivando la risposta, se può esistere una funzione di due variabili f, di classe C^2, tale che $f_x(x,y) = x^2e^y$ e $f_y(x,y) = y^2e^x$.

`37.` Provare a generalizzare il lemma **9** alle funzioni di 3 variabili.

37. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

`Domanda 45.`

Dire cosa sono le derivate parziali di ordine k di una funzione in più variabili.

`Domanda 46.`

Dire cosa significa che una funzione in più variabili è di classe C^k.

`Domanda 47.`

Dire cos'è la matrice Hessiana e spiegare, motivando la risposta, come si può usarla per calcolare $\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)$, dove $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e ν e ω sono versori di $\mathbf{R}^n$.

`Domanda 48.`

Enunciare e dimostrare il teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 10

A.A. 2011-2012
24 Ottobre 2011
ore 11.30-13.15

38. Contenuti della Lezione

Gli argomenti trattati in questa lezione sono contenuti nei paragrafi **11.4** e **11.6** del libro di testo.
Il paragrafo **11.5** è stato momentaneamente omesso, per cui il teorema **11.15** è stato enunciato e dimostrato in un modo leggermente diverso, che riportiamo qui sotto, preceduto da due definizioni e due lemmi che ne facilitano la comprensione e la dimostrazione.

Definizione 3.

Sia M una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita da $Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$.
Diremo che:

(**a**) Q è **definita positiva** se $Q(\overline{x}) > 0$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n - \{\overline{0}\}$;

(**b**) Q è **definita negativa** se $Q(\overline{x}) < 0$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n - \{\overline{0}\}$.

Definizione 4.

Sia M una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita da $Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$. Diremo che Q è **coercitiva** se esiste una costante $K > 0$ tale che

$$Q(\overline{x}) \geq K\|\overline{x}\| \qquad \text{per ogni } \overline{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Lemma 11.

Sia M una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >$ la forma quadratica definita a partire da M. Allora Q è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di M sono strettamente positivi mentre è definita negativa se e solo se tutti gli autovalori di M sono strettamente negativi.

Lemma 12.

Sia M una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >$ la forma quadratica definita a partire da M. Se Q è definita positiva allora è anche coercitiva, mentre se Q è definita negativa allora è $-Q(x)$ ad essere coercitiva.

Dimostrazione del Lemma 12.

Sia $S = \{\overline{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\overline{x}\| = 1\}$.
Si noti che S è compatto, perché è chiuso e limitato.
Inoltre $Q(\overline{x})$ è continua, perché è un polinomio.
Quindi, per il teorema di Weierstrass, $Q(\overline{x})$ ha su S un minimo che indicheremo con m. Notiamo che $m > 0$ perché $Q(\overline{x})$ è una forma quadratica definita positiva, e quindi strettamente positiva su tutto S.
Per ogni $\overline{x} \in \mathbf{R}^n - \{\overline{0}\}$, si ha:

$$Q(\overline{x}) =< M\overline{x}, \overline{x} >=< M\frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}, \frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|} > \cdot \|\overline{x}\|^2 \geq m\|\overline{x}\|^2, \tag{15}$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla linearità del prodotto scalare in ciascuno dei suoi argomenti, mentre l'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che $\dfrac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}$ è un versore e quindi sta in S.
Si noti a questo punto che la (15) significa proprio che $Q(\overline{x})$ è coercitiva, che è quanto volevamo dimostrare.
In caso in cui $Q(\overline{x})$ è definita negativa segue in modo ovvio, moltiplicando tutto per -1.

Teorema 13.

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$, $\overline{x}_0$ un punto di A ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2 avente in $\overline{x}_0$ un punto stazionario.
Indicata con $H(\overline{x})$ la matrice Hessiana di f si ha che:

(**a**) se tutti gli autovalori di $H(\overline{x}_0)$ sono strettamente positivi allora $\overline{x}$ è un punto di minimo relativo stretto per f;

(**b**) se tutti gli autovalori di $H(\overline{x}_0)$ sono strettamente negativi allora $\overline{x}$ è un punto di massimo relativo stretto per f;

(**c**) se $H(\overline{x}_0)$ ha almeno un autovalore strettamente negativo e un autovalore strettamente positivo allora $\overline{x}$ è un punto di sella per f.

Dimostrazione del Teorema 13.

Per cominciare, trattiamo il caso in cui $H(\overline{x}_0)$ ha tutti gli autovalori strettamente positivi e quindi la forma quadratica è definita positiva.
Notiamo che, essendo $\overline{x}_0$ un punto stazionario, avremo che $\nabla f(\overline{x}_0)$ è il vettore nullo, di conseguenza, lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine di f nel punto $\overline{x}_0$ è dato da:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) &= f(\overline{x}_0) + \frac{1}{2} < H(\overline{x}_0)(\overline{x} - \overline{x}_0), (\overline{x} - \overline{x}_0) > + o\left(\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^2\right) \geq \\ &\geq f(\overline{x}_0) + \frac{K}{2}\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^2 + o\left(\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^2\right) = \\ &= f(\overline{x}_0) + \left(\frac{K}{2} + o\,(1)\right)\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^2 \end{aligned} \tag{16}$$

dove K è la costante di coercitività della forma quadratica avente come matrice $H(\overline{x}_0)$.
Poiché $K > 0$, esisterà un intorno di $\overline{x}_0$ nel quale sia $\dfrac{K}{2} + o\,(1) > 0$. Di conseguenza, per ogni $\overline{x}$ in tale intorno, si avrà $f(\overline{x}) > f(\overline{x}_0)$ e quindi $\overline{x}_0$ è un punto di minimo relativo stretto.
Per la dimostrazione del caso definito negativo, basta osservare che, considerando $-f(\overline{x})$, si ricade nel caso definito positivo.
Infine per trattare il caso (**c**), basta osservare che restringendo f alla retta passante per $\overline{x}_0$ e avente direzione data dall'autovettore che ha per autovalore λ, si ottiene una funzione (in una variabile), che ha $\overline{x}_0$ come punto stazionario e che è strettamente convessa in un intorno di $\overline{x}_0$ se $\lambda > 0$, mentre è strettamente concava se $\lambda < 0$.
Di conseguenza, in ogni intorno di $\overline{x}_0$, esistono sia punti $\overline{x}$ in cui $f(\overline{x}) > f(\overline{x}_0)$, sia punti $\overline{x}$ in cui $f(\overline{x}) < f(\overline{x}_0)$. Quindi, in tal caso, $\overline{x}_0$ è un punto di sella.

39. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica e studiando i punti stazionari delle funzioni proposte nel paragrafo che segue.

40. Lista dei problemi

38. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare i punti stazionari e studiarne la natura. Nel caso si tratti di punti di estremo relativo, dire se sono anche di estremo assoluto, motivando la risposta.

$$f_1(x, y) = \ln(4 + xy) - \frac{1}{10}(x^2 + y^2)$$

$$f_2(x, y) = x^3y^3 - 24(x^2 + y^2)$$

$$f_3(x, y) = 3x^4 + 3y^4 + 10x^2y^2 - 16x^2 - 16y^2$$

$$f_4(x, y) = (3x + 3y + 10)e^{x^2+y^2}$$

$$f_5(x, y) = (6x + 6y - 13)e^{x^2+y^2}$$

$$f_6(x, y) = (2x + 2y + 5)e^{xy}$$

$$f_7(x, y) = 8x^3y^3 - 3(x^8 + y^8)$$

$$f_8(x, y) = x^3y^3 + 3(x^4 + y^4)$$

$$f_9(x, y) = (1 + x^2)\sin y$$

$$f_{10}(x, y) = x^2 \cos y$$

41. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 49.

Dire chi è il polinomio di Taylor di ordine 2 di una funzione in più variabili ed enunciare per esso l'equivalente del teorema di Peano.

Domanda 50.

Enunciare il teorema relativo al resto di Lagrange nel caso particolare in cui il polinomio di Taylor abbia ordine 1.

Domanda 51.

Dare la definizione di punto di massimo (minimo) relativo e assoluto, debole o stretto, per una funzione in più variabili a valori scalari.

Domanda 52.

Dare la definizione di punto di sella per una funzione in più variabili a valori scalari.

Domanda 53.

Dare la definizione di punto stazionario per una funzione in più variabili.

Domanda 54.

Enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione il fatto di essere un punto di estremo relativo per una funzione in più variabili, con il fatto di essere un punto stazionario.

Domanda 55.

Enunciare e dimostrare il teorema che serve a stabilire la natura dei punti stazionari di una funzione in più variabili, utilizzando la matrice Hessiana.

Domanda 56.

Dire come diventa il teorema richiesto nella domanda **55** nel caso particolarmente semplice delle funzioni in 2 variabili.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **11**

A.A. 2011-2012
25 Ottobre 2011
ore 11.30-13.15

42. Contenuti della Lezione

Nella prima parte della lezione si sono trattati gli insiemi convessi (in $\mathbf{R}^n$) e le funzioni convesse in più variabili. Gli argomenti trattati sono contenuti nel paragrafo **11.5** del libro di testo, del quale si sono comunque tralasciati i teoremi **11.10**, **11.11** e **11.12**.
Si è comunque dato risalto al fatto che, per una funzione in più variabili, la convessità è **equivalente** alla convessità di tutte le sue restrizioni a rette.
Ciò dovrebbe consentire allo studente di concludere da solo diversi fatti, tra i quali quello che il grafico di una funzione convessa sta sempre sopra al grafico del piano tangente, che è il significato del teorema **11.11**.
Nel resto della lezione si è tornati sul problema dello studio dei punti stazionari per determinare se sono massimi, minimi o selle: da un lato si è ricordato come si determina se la matrice Hessiana è definita positiva o negativa (vedi problema **39**); dall'altro si è fatto qualche esempio in cui, pur non funzionando il test della matrice Hessiana, si può ugualmente studiare la natura del punto critico.

43. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Per quanto riguarda i problemi proposti nel paragrafo successivo, lo studente ricordi in particolare il risultato contenuto nel problema **39** (che è anche stato svolto a lezione) che è importante perché fornisce un metodo per determinare se una matrice sia definita positiva o definita negativa.
Invece il problema **41** serve a farlo esercitare nello studio dei punti critici, anche nel caso in cui la matrice Hessiana non è utilizzabile.
I problemi **42**, **43**, **44** e **45** servono a far riflettere lo studente sulle differenze che ci sono tra le funzioni in una sola variabile e quelle in più variabili; in particolare il problema **45** dovrebbe fargli capire che non deve mai dare per scontata una proprietà (apparentemente ovvia, ma falsa) per il solo fatto che questa è vera in una sola variabile. Si tratta di problemi a volte difficili che possono eventualmente essere omessi, senza particolari ripercussioni per il resto del corso.
Infine, i problemi dal **46** in poi, servono a testare la comprensione del concetto di convessità.

44. Lista dei problemi

39. Si consideri la seguente equazione algebrica di grado n nella variabile λ:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Mostrare che, se essa ha n radici reali, allora esse sono tutte strettamente negative (positive) se e solo se $a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ sono tutti strettamente positivi (alternativamente, strettamente negativi e strettamente positivi).

40. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare i punti stazionari e studiarne la natura. Nel caso si tratti di punti di estremo relativo, dire se sono anche di estremo assoluto, motivando la risposta.

$$f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 - xy - xz$$

$$f_2(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - 2xz$$

$$f_3(x,y,z,w) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4w^2 + yz - xw$$

$$f_4(x,y,z,w) = 3x^4 + 4y^5 + 5z^4 + 2w^6 - 20yz + 12xw$$

$$f_5(x,y,z) = (1 + x^2 + y^2)\sin z$$

$$f_6(x,y,z) = xyz$$

$$f_7(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xyz$$

$$f_8(x,y,z,w) = 8x^2 + 2y^2 + (w+x)^2(z-1) + z^3$$

41. Per ciascuna delle seguenti funzioni dire, al variare del parametro $\alpha > 0$, se il punto $(0,0)$ è un punto di massimo relativo, minimo relativo o sella. Nel caso si tratti di un punto di estremo relativo, dire se è anche di estremo assoluto oppure no. Motivare ogni affermazione con le necessarie argomentazioni.

$$f_1(x,y) = x^8 + y^4 - (x^2 + y^4)^\alpha$$

$$f_2(x,y) = x^8 + y^4 - (2x^2 + y^4)^\alpha$$

$$f_3(x,y) = x^8 + 2y^6 - (x^2 + y^4)^\alpha$$

$$f_4(x,y) = x^8 + y^6 - (x^2 + y^4)^\alpha$$

42. Costruire una funzione in 2 variabili che ha due punti di sella e nessun punto di estremo relativo.

43. Costruire una funzione in 2 variabili che ha infiniti punti di sella e nessun punto di estremo relativo.

44. Costruire una funzione in 2 variabili per la quale vi sia almeno un punto di sella che è di accumulazione per l'insieme dei punti di estremo relativo.

45. Costruire una funzione in 2 variabili per la quale vi siano esattamente 2 punti stazionari e questi siano entrambi dei punti di massimo relativo.

46. Dire, motivando la risposta, se i seguenti insiemi sono convessi oppure no:

$$\begin{aligned}
A &= \mathbf{R}^2, \\
B &= \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}, \\
C &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| 0 < x + y < 1\big\}, \\
D &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| 0 < x + y < 1\big\} \cup \{(0,0),\ (-1,1)\}, \\
E &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| 0 < x + y < 1\big\} \cup \{(0,0),\ (0,1)\}, \\
F &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| |x| + |y| < 1\big\}, \\
G &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| |x| + |y| < 1\big\} \cup \{(1,0)\}, \\
H &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| |x| + |y| < 1\big\} \cup \{(1,0),\ (0,1)\}, \\
I &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| x^2 + y^2 < 1\big\}, \\
J &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| x^2 + y^2 < 1\big\} \cup \{(1,0)\}, \\
K &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| x^2 + y^2 < 1\big\} \cup \{(1,0),\ (0,1)\}, \\
L &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| x^2 + y^2 < 1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \bigm| x^2 + y^2 = 1 \text{ con } x \in \mathbf{Q}\big\}.
\end{aligned}$$

47. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare in quali zone sono convesse (o concave) debolmente e/o strettamente. Motivare ogni affermazione con le necessarie argomentazioni.

$$f_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

$$f_2(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x^{16}$$

$$f_3(x,y) = 3x + 7y$$

$$f_4(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 11x - 2y$$

$$f_5(x,y) = x^8 + y^8$$

$$f_6(x,y) = x^3 + y^3 + 4x$$

$$f_7(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f_8(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$$

48. Dire se è vero che una funzione $f(x,y)$ definita su tutto $\mathbf{R}^2$ e dotata di simmetria radiale è convessa se e solo se è convessa la sua restrizione all'asse x.
Nel caso sia vero, dimostrarlo; nel caso sia falso, esibire un controesempio.

49. Cosa succede nel problema **48** se la restrizione si prende solo sulla parte positiva dell'asse x?

50. Dire se è vero che una funzione $f(x,y)$ definita su tutto $\mathbf{R}^2$ è convessa se e solo se è convessa nella variabile x per ogni fissato valore di y e nella variabile y per ogni fissato valore di x.
Nel caso sia vero, dimostrarlo; nel caso sia falso, esibire un controesempio.

45. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 57.

Dare la definizione di insieme convesso in $\mathbf{R}^n$.

Domanda 58.

Dare la definizione di funzione (in più variabili) debolmente convessa e strettamente convessa. Fare lo stesso per debolmente concava e strettamente concava.

Domanda 59.

Dire, motivando la risposta, che relazione c'è, per una funzione in più variabili, tra l'essere convessa su un insieme convesso A e l'essere convessa ristretta ad ogni segmento contenuto in A.

Domanda 60.

Enunciare il teorema, per le funzioni in più variabili, che mette in relazione la convessità con gli autovalori della matrice Hessiana.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 12

A.A. 2011-2012
28 Ottobre 2011
ore 15.00-16.45

46. Contenuti della Lezione

La lezione è consistita nell'enunciare, spiegare e dimostrare il teorema delle funzioni implicite nel suo caso più semplice: funzione scalare in due sole variabili.
Riportiamo qui di seguito enunciato e dimostrazione del teorema.

Teorema 14.

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1 ed $(x_0, y_0) \in A$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Allora esistono I intorno di x_0 e J intorno di y_0 ed esiste $g : I \to J$ di classe C^1 tali che $I \times J \subset A$ e per ogni $(x, y) \in I \times J$ si ha $f(x, y) = 0$ se e solo se $y = g(x)$.
Inoltre, per la derivata di g vale la formula:

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Dimostrazione del Teorema 14.

Osserviamo che, passando eventualmente da f a $-f$, possiamo sempre supporre che sia $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.
Indicato con m il valore $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, dalla continuità di $\frac{\partial f}{\partial y}$ segue che è sempre possibile scegliere $I = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ e $J = [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, in modo tale che $I \times J \subset A$ e che, per ogni $(x, y) \in I \times J$ si abbia:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > \frac{m}{2}. \tag{17}$$

Inoltre, grazie al teorema di Weierstrass e alla continuità di $\frac{\partial f}{\partial x}$, esiste finita la costante positiva M definita da:

$$M = \max_{(x,y)\in I\times J} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|. \tag{18}$$

Notiamo infine che, rimpicciolendo se necessario ρ, è sempre possibile fare in modo che il rettangolo $I \times J$ sia *lungo e stretto*, cioè che valga la condizione:

$$\frac{\delta}{\rho} > \frac{2M}{m}. \tag{19}$$

L'utilità e il significato geometrico di tale condizione saranno chiari in seguito.
A questo punto osserviamo che, grazie al teorema del valor medio, per ogni $(x, y) \in I \times J$ si ha:

$$\begin{aligned} f(x, y) =& f(x, y) - f(x_0, y_0) = \\ =& f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \\ =& \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x - x_0), \end{aligned}$$

dove η è compreso tra y e y_0 e ξ è compreso tra x e x_0.
Di conseguenza, ricordando (17) e (18), per $y \geq y_0$ avremo

$$f(x, y) \geq \frac{m}{2}(y - y_0) - M|x - x_0| \tag{20}$$

mentre per $y < y_0$ avremo

$$f(x, y) \leq \frac{m}{2}(y - y_0) + M|x - x_0| \tag{21}$$

Siccome però la condizione

$$\frac{m}{2}(y - y_0) - M|x - x_0| > 0$$

è equivalente alla condizione

$$y > y_0 + \frac{2M}{m}|x - x_0|, \tag{22}$$

la (20) ha come conseguenza che $f(x, y) > 0$, per tutti gli $(x, y) \in I \times J$ che soddisfano (22), cioè per tutti i punti della zona segnata in grigio chiaro nella figura seguente:

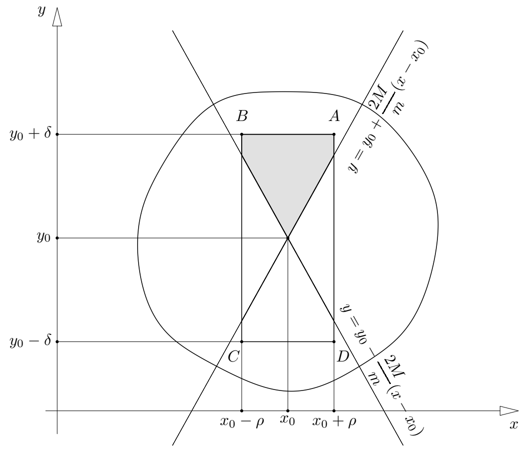

figura 1

In modo del tutto analogo dalla (21) si ottiene che $f(x, y) < 0$, per tutti gli $(x, y) \in I \times J$ che soddisfano

$$y < y_0 - \frac{2M}{m}|x - x_0|, \tag{23}$$

cioè per tutti i punti della zona segnata in grigio scuro nella figura seguente:

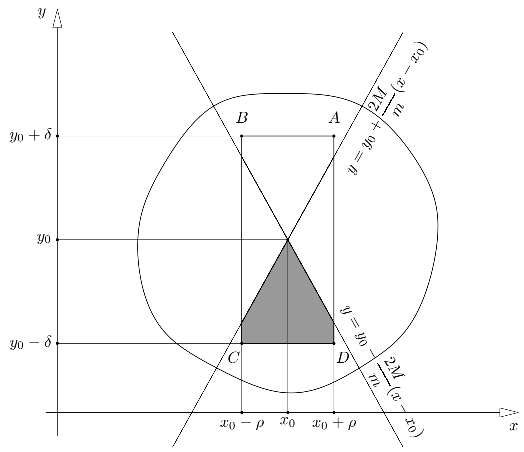

figura 2

Il fatto che il segmento AB stia tutto nella zona grigio chiaro (nella figura 1) e che il segmento CD stia tutto nella zona grigio scuro (nella figura 2) è conseguenza della condizione (19): essa indica che il rapporto tra l'altezza e la base del rettangolo $ABCD$ è maggiore del valore assoluto della pendenza delle due rette oblique passanti per (x_0, y_0) tracciate nelle figure. Di conseguenza le due rette *escono* dal rettangolo passando per i segmenti laterali AD e BC.
Mostriamo ora che, come conseguenza di questo fatto, per ogni $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, esiste un solo $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ tale che $f(x, y) = 0$.
Infatti, per ogni fissato $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, consideriamo il segmento PQ che congiunge i punti $P \equiv (x, y_0 - \delta)$ e $Q \equiv (x, y_0 + \delta)$, come vediamo indicato nella figura seguente:

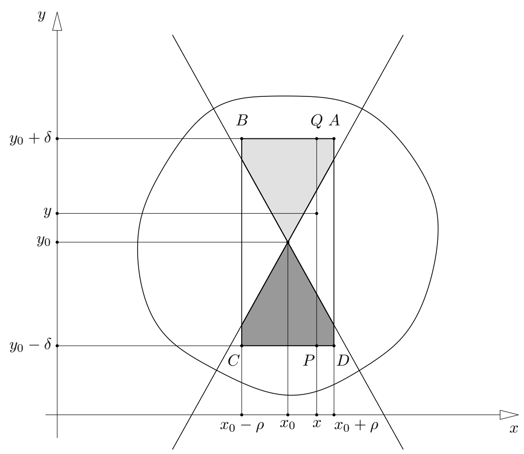

figura 3

Per quanto appena visto si ha $f(x, y_0 - \delta) < 0$ e $f(x, y_0 + \delta) > 0$ e quindi, essendo f continua, per il teorema degli zeri esisterà un punto $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ tale che $f(x, y) = 0$. Inoltre tale y è unico perchè la funzione della sola variabile y che si ottiene restringendo f al segmento PQ è strettamente crescente in quanto la sua derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ è sempre strettamente positiva.

Possiamo quindi concludere che, per ogni $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, esiste un solo $y \in (y_0-\delta, y_0+\delta)$ tale che $f(x,y)=0$.
Rimane dunque ben definita una funzione $g : (x_0-\rho, x_0+\rho) \to (y_0-\delta, y_0+\delta)$ che associa ad ogni $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$ l'unico $y \in (y_0-\delta, y_0+\delta)$ tale che $f(x,y)=0$.
Osserviamo che, poiché nella zona grigio chiaro si ha $f(x,y)>0$ e nella zona grigio scuro si ha $f(x,y)<0$, il grafico di g deve necessariamente trovarsi nella parte bianca del rettangolo $ABCD$ (vedi figura 4)

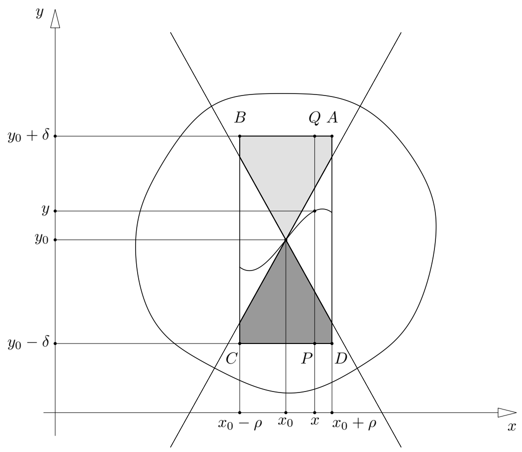

figura 4

Da ciò, in particolare, segue che

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0 = g(x_0),$$

cioè che g è continua in x_0.
Mostriamo ora che, in realtà, g è anche derivabile in x_0 e si ha $g'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$.
A tale scopo ricordiamo che, essendo f di classe C^1 essa è anche differenziabile, quindi, per $(x,y)\to(x_0,y_0)$ si ha:
(24)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right).$$

In particolare, poichè g è continua in x_0 ed $f(x,g(x))=0$ per ogni $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, dalla (24) si ottiene che per $x\to x_0$ si ha:

$$0 = 0 + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(g(x)-g(x_0)) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(g(x)-g(x_0))^2}\right).$$

da cui, dividendo ambo i membri per $(x-x_0)$, si ottiene che per $x\to x_0$ si ha:

$$(25) \qquad f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = o\left(\sqrt{1+\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)^2}\right).$$

A questo punto ricordiamo (vedi figura 4) che il grafico di $g(x)$ è nella zona bianca del rettangolo $ABCD$ e, di conseguenza,

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \le \frac{2M}{m}.$$

Di conseguenza $\sqrt{1+\left(\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)^2}$ è una funzione limitata e quindi la (25) equivale a dire che $f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ è infinitesima.
Quindi si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to x_0}\left(f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = \\ &= f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}, \end{aligned}$$

da cui segue:

$$(26) \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)},$$

che è quanto volevamo dimostrare.
Per concludere osserviamo che in ogni altro punto del grafico di g valgono le stesse ipotesi che valgono nel punto (x_0,y_0), quindi vale la formula (26).
Ciò dimostra che g è di classe C^1 su tutto l'intervallo $(x_0-\rho, x_0+\rho)$.

47. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica e svolgendo i problemi della lista che gli proponiamo nel capitolo successivo.

48. Lista dei problemi

51. Siano $f(x,y) = x^4+y^4+2x^2y^2-8x^2+8y^2$ e $P\equiv(1,2)$. Detto c il valore che f assume in P e detta $\Gamma = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y)=c\}$, dire se P è un punto regolare per Γ e, in caso affermativo, trovare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P.
Fare lo stesso usando i punti $Q\equiv(-1,1)$, $R\equiv(0,0)$ e $S\equiv(2,0)$ al posto di P. Nel caso qualche punto tra quelli assegnati non sia un punto regolare, cercare lo stesso di descrivere come è fatto localmente l'insieme Γ.

52. Come per il problema **51**, ma con $f(x,y) = x^2y^2+2xy^2+4x^2y+4x^2+y^2+8xy+8x+4y$, $P\equiv(0,0)$, $Q\equiv(1,1)$, $R\equiv(-1,-2)$ e $S\equiv(-1,0)$.

53. Come per il problema **51**, ma con $f(x,y) = x^6+x^2y^4-2x^5-2xy^4+x^4+y^4$, $P\equiv(0,1)$, $Q\equiv\left(-1,\sqrt[4]{5}\right)$, $R\equiv(0,0)$ e $S\equiv(1,1)$.

49. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alla seguente domanda:

Domanda 61.

Enunciare e dimostrare il teorema delle funzioni implicite nel caso di una sola funzione scalare in due variabili.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 13

A.A. 2011-2012
31 Ottobre 2011
ore 11.30-13.15

50. Contenuti della Lezione

L'intera lezione è stata dedicata alla risoluzione di problemi.

Più precisamente sono stati svolti i problemi **2** e **10** della lista dei problemi assegnati alle prove d'esame l'anno scorso, e il primo punto del problema **41**.

51. Lavoro proposto per casa

Lo studente testi la sua capacità di risolvere i problemi cimentandosi con quelli che gli proponiamo nel capitolo seguente. Si tratta di un misto di problemi di riepilogo che coprono, grosso modo, tutti gli argomenti più importanti svolti fino alla lezione 9.

52. Lista dei problemi

54. A partire da un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ eseguendo ripetutamente le operazioni di chiusura e di complementazione, tante volte quante si vuole, si possono ottenere molti altri insiemi.
Ad esempio, a partire da $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ (cerchio di raggio 1 senza bordo) posso ottenere i tre insiemi

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 1\}$$
$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$
$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$$

Infatti A_1 è il complementare di A, A_2 è la chiusura di A e A_3 è il complementare della chiusura di A.
Se, anziché partire dal cerchio senza bordo, parto da un insieme più *strano*, qual è il massimo numero di insiemi che posso ottenere?

55. Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{11}y^{10}}{x^{20}+y^{20}}$.

56. Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^5+xy^7}{x^4+y^8}$.

57. Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9y^7}{x^3+y^6}$.

58. Sia data la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^8+x^3y^7}{x^6+y^6} + x + y & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(27) Verificare se f è continua in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(28) Verificare se f è continua in $(0,0)$.
(29) Verificare se f è derivabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e, in caso affermativo, calcolarne le derivate parziali.
(30) Verificare se f è derivabile in $(0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarne le derivate parziali.
(31) Verificare se f è differenziabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(32) Verificare se f è differenziabile in $(0,0)$.

59. Sia data la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^5}{x^8+y^8} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(33) Verificare se f è continua in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(34) Verificare se f è continua in $(0,0)$.
(35) Verificare se f è derivabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e, in caso affermativo, calcolarne le derivate parziali.
(36) Verificare se f è derivabile in $(0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarne le derivate parziali.
(37) Verificare se f è differenziabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(38) Verificare se f è differenziabile in $(0,0)$.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 14

A.A. 2011-2012
4 Novembre 2011
ore 15.00-16.45

53. Contenuti della Lezione

La parte trattata, cioè il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel caso particolare di un solo vincolo in $\mathbf{R}^2$, è contenuta nel paragrafo **13.2**.

54. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica con le demande di verifica e la propria abilità nei problemi svolgendo quelli del paragrafo che segue.

55. Lista dei problemi

60. Dati $f(x,y)=x^2+4y^2$ e $\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 4x^2+y^2\right\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

61. Dati $f(x,y)=xy$ e $\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 5x^2+5y^2+6xy=4\right\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

62. Dati $f(x,y)=y^3e^x$ e $\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+3y^2=4\right\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

63. Dati $f(x,y)=y^4e^x$ e $\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 4y^2-x^2=3\right\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

64. Dati $f(x,y)=\sin^2 x+\sin^2 y$ e $\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Γ e studiarne la natura, indicando anche eventuali punti di estremo assoluto.

56. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 62.

Enunciare e dimostrare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso particolare di un solo vincolo in $\mathbf{R}^2$.

Domanda 63.

Dare la definizione di punto stazionario vincolato nel caso di un solo vincolo in $\mathbf{R}^2$.

Domanda 64.

Spiegare come si può stabilire se un punto stazionario vincolato è, oppure no, un punto di massimo o minimo relativo vincolato, nel caso di un solo vincolo in $\mathbf{R}^2$.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 15

A.A. 2011-2012
7 Novembre 2011
ore 11.30-13.15

57. Contenuti della Lezione

La parte trattata, cioè il riconoscimento di estremi vincolati quando questi sono sul bordo di un insieme di $\mathbf{R}^2$ con parte interna non vuota, è tutta contenuta nel paragrafo **13.3**.

58. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

Inoltre svolga i problemi della lista che gli proponiamo nel capitolo successivo, che sono problemi (tutti molto standard) assegnati in esami di anni passati.

59. Lista dei problemi

65. Sia $f(x,y)=xy^2$ e sia

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\le 3\right\}.$$

(39) Trovare i punti stazionari di f sul bordo di D.
(40) Trovare eventuali punti stazionari di f interni a D.
(41) Trovare (se ci sono) massimo e minimo assoluto di f su D.
(42) Studiare la natura dei punti trovati in (39) considerando solo il bordo di D.
(43) Dei punti che sono di estremo relativo per f considerando solo il bordo di D, dire quali rimangono di estremo relativo anche quando si considera la parte interna di D.

66. Sia $f(x,y)=xy$ e sia

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+4y^2\le 16,\ 4x^2+y^2\ge 16,\ x\ge |y|\right\}.$$

(44) Trovare i punti stazionari di f sul bordo di D.
(45) Trovare eventuali punti stazionari di f interni a D.
(46) Trovare (se ci sono) massimo e minimo assoluto di f su D.
(47) Studiare la natura dei punti trovati in (44) considerando solo il bordo di D.
(48) Dei punti che sono di estremo relativo per f considerando solo il bordo di D, dire quali rimangono di estremo relativo quando si considera anche la parte interna di D.

67. Sia data la funzione $f(x,y)=x^2y+xy^2+xy$ e l'insieme

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy\ge\frac{1}{16},\ x+y\ge -1,\ x\le 0,\ y\le 0\right\}$$

(49) Disegnare l'insieme D.
(50) Trovare eventuali punti stazionari liberi di f interni a D e studiarne la natura.
(51) Determinare il massimo e il minimo assoluto di f su D.

68. Utilizzare i moltiplicatori di Lagrange per determinare gli estremi di $f(x,y)=2x^2+y^2$ sull'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+2y^2\ge 1\right\}$.

69. Sia $f(x,y) = e^{xy^2+x^2y+xy}$ e sia

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; xy \leq 1\right\}.$$

(52) Trovare eventuali punti stazionari liberi di f interni a D e studiarne la natura.
(53) Trovare i punti stazionari vincolati di f sul bordo di D.
(54) Trovare (se ci sono) massimo e minimo assoluto di f su D.
(55) Studiare la natura dei punti trovati in (53) considerando solo il bordo di D.
(56) Dei punti che sono di estremo relativo per f considerando solo il bordo di D, dire quali rimangono di estremo relativo anche quando si considera la parte interna di D.

70. Sia $f(x,y) = xy$ e sia

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2+12x+11 \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 25\right\}.$$

(57) Trovare eventuali punti stazionari liberi di f interni a D e studiarne la natura.
(58) Trovare i punti stazionari vincolati di f sul bordo di D.
(59) Trovare (se ci sono) massimo e minimo assoluto di f su D.
(60) Studiare la natura dei punti trovati in (58) considerando solo il bordo di D.
(61) Dei punti che sono di estremo relativo per f considerando solo il bordo di D, dire quali rimangono di estremo relativo anche quando si considera la parte interna di D.

60. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 65.

Dato Ω aperto di $\mathbf{R}^2$, $f:\Omega \to \mathbf{R}$, e D insieme chiuso contenuto in Ω, dire in cosa consiste il *metodo delle curve di livello* per stabilire se un punto del bordo di D, sia di estremo relativo per f ristretta a D.

Domanda 66.

Dati un insieme aperto $A \subset \mathbf{R}^2$, un insieme chiuso $D \subset A$ con parte interna non vuota ed $f : A \to \mathbf{R}$ di classe C^1, dire come si può usare il gradiente di f per stabilire se un punto di estremo relativo per f ristretta a ∂D sia di estremo relativo anche per f ristretta D.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **16**

A.A. 2011-2012
8 Novembre 2011
ore 11.30-13.15

61. Contenuti della Lezione

Gli argomenti trattati sono tutti contenuti nei paragrafi **13.1**, **13.1.2**, **13.1.4** e **13.1.5** del libro di testo.

62. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre svolga i 3 problemi che gli proponiamo nel capitolo successivo.

63. Lista dei problemi

71. Siano $f(x,y,z) = xe^{x-2} + ye^{y-1} + ze^{z-3}$ e $P \equiv (2,1,3)$. Detto c il valore che f assume in P e detta $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; f(x,y,z) = c\right\}$, dire se P è un punto regolare per Σ e, in caso affermativo, trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto P.
Fare lo stesso usando i punti $Q \equiv (0,0,0)$, $R \equiv (1,-1,-1)$ e $S \equiv (-1,-1,-1)$ al posto di P. Nel caso qualche punto tra quelli assegnati non sia un punto regolare, cercare lo stesso di descrivere come è fatto localmente l'insieme Σ.

72. Come per il problema **71**, ma con $f(x,y,z) = 3^{xyz} - x^4 - y^4 - z^4$, $P \equiv (1,1,1)$, $Q \equiv (-1,1,-1)$, $R \equiv (1,0,0)$ e $S \equiv (0,-1,0)$.

73. Siano $\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; xyz = 4,\ x^2+y^2+z^2 = 9\right\}$, e $P \equiv (1,2,2)$. Dopo aver verificato che P è un punto regolare per Γ trovare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P.
Fare lo stesso usando i punti $Q \equiv (2,-1,-2)$ e $S \equiv (-1,-2,2)$ al posto di P.

64. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 67.

Enunciare il teorema delle funzioni implicite nel caso di una funzione scalare definita su $\mathbf{R}^3$.

Domanda 68.

Enunciare il teorema delle funzioni implicite nel caso di due funzioni scalari definite su $\mathbf{R}^3$.

Domanda 69.

Enunciare il teorema delle funzioni implicite nel caso generale: m funzioni scalari definite su $\mathbf{R}^n$, con $m < n$.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 17

A.A. 2011-2012
11 Novembre 2011
ore 15.00-16.45

65. Contenuti della Lezione

Gli argomenti trattati sono tutti contenuti nei paragrafi **13.4**, **13.5** e **13.6** del libro di testo.

66. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre svolga i problemi gli proponiamo nel capitolo successivo.

67. Lista dei problemi

74. Trovare il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y,z) = xyz$ sulla superficie

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 3\right\}.$$

75. Trovare il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y,z) = x+y+z$ sulla curva

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = \frac{5}{7},\ 2x-y=1\right\}.$$

68. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 70.

Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di un vincolo in $\mathbf{R}^3$.

Domanda 71.

Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di 2 vincoli in $\mathbf{R}^3$.

Domanda 72.

Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso generale: m vincoli in $\mathbf{R}^n$, con $m < n$.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 18

A.A. 2011-2012
14 Novembre 2011
ore 11.30-13.15

69. Contenuti della Lezione

La lezione è stata interamente dedicata ed esercitarsi su problemi sugli estremi vincolati.

70. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria abilità nei problemi svolgendo quelli del paragrafo che segue.

71. Lista dei problemi

76. Dati $f(x,y,z) = 3x+2y+z$ e $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \le 0\right\}$, trovare massimo e minimo assoluto di f ristretta a Σ.

77. Trovare i punti di $\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = 4,\ x+y+z=1\right\}$, che massimizzano o mimimizzano la distanza dall'origine.

78. Dati $f(x,y,z) = xyz$ e $\Sigma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = (z-1)^2\right\}$, trovare i punti stazionari vincolati di f ristretta a Σ_1.
Inoltre, detta $\Sigma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = (z-1)^2,\ -1 \le z \le 1\right\}$, trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta a Σ_2.

79. Dati $f(x,y,z) = y^2(x^2+y^2+z^2-25)$ e $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 25,\ -4 \le z \le 4\right\}$, trovare massimo e minimo assoluto di f ristretta a V.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 19

A.A. 2011-2012
15 Novembre 2011
ore 11.30-13.15

72. Contenuti della Lezione

Gli argomenti trattati sono tutti contenuti nei paragrafi **12.1**, **12.1.1**, **12.3**, **12.4** e **12.4.1** del libro di testo.

73. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

74. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 73.

Dire cos'è una curva, una curva di classe C^k e una curva regolare. Dire inoltre cos'è il sostegno di una curva e cosa sono gli estremi.

Domanda 74.

Dare la definizione di vettore tangente.

Domanda 75.

Motivare la necessità di definire il concetto di curva regolare, esibendo una curva di classe almeno C^1 avente il supporto dotato di "spigoli".

Domanda 76.

Dare due definizioni di curve equivalenti, una che tenga conto anche dell'orientazione e l'altra no.

Domanda 77.

Dare la definizione di curva rettificabile e di lunghezza di una curva rettificabile.

Domanda 78.

Dire se le curve C^1 sono rettificabili.

Domanda 79.

Dare un esempio di curva non rettificabile.

Domanda 80.

Enunciare il teorema relativo alla lunghezza di curve equivalenti.

Domanda 81.

Definire l'integrale curvilineo di prima specie e mostrare che passando a una curva equivalente l'integrale non cambia.

Domanda 82.

Dare la definizione di forma differenziale.

Domanda 83.

Definire l'integrale curvilineo di seconda specie e mostrare che passando a una curva equivalente l'integrale può solo cambiare segno.

Domanda 84.

Dare la definizione di forma differenziale esatta e di funzione potenziale.

Domanda 85.

Dare la definizione di forma differenziale chiusa.

Domanda 86.

Mostrare che una forma differenziale esatta è anche chiusa, ma non viceversa.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **20**

A.A. 2011-2012
18 Novembre 2011
ore 15.00-16.45

75. Contenuti della Lezione

Nella lezione si è conclusa la parte di teoria sulle forme differenziali e si è svolto qualche esercizio. Gli argomenti trattati sono tutti contenuti nei paragrafi **12.4**, **12.4.1** e **12.4.2** del libro di testo.

76. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

Inoltre svolga i problemi della lista che gli proponiamo nel capitolo successivo.

I problemi che vanno dal **81** al **88**, sono problemi (tutti molto standard) assegnati in esami di anni passati.

Il problema **80** invece serve a far familiarizzare lo studente con il concetto di insieme semplicemente connesso. In particolare, lo studente provi a cimentarsi anche con l'insieme S del problema **80**: si tratta di un insieme in $\mathbf{R}^4$ (pur semplicissimo) e quindi lo studente non potrà visualizzarlo.

Scoprirà che, di fatto, venuta meno l'intuizione geometrica, la definizione formale data di curve omotope, è la sola che gli può venire in aiuto, anche se, come prima impressione, lo studente potrebbe averla considerata enormemente (e inutilmente!) complicata.

77. Lista dei problemi

80. Dire, motivando la risposta, se i seguenti insiemi sono semplicemente connessi oppure no:

$$\begin{aligned}
A =&\mathbf{R}^2,\\
B =&\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\},\\
C =&\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\ge 1\right\},\\
D =&\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; 1\le x^2+y^2\le 4\right\},\\
E =&\mathbf{R}^2 - \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; y=0 \text{ e } x>5\right\},\\
F =&\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; x>y^2\right\} - \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; y=0 \text{ e } x>1\right\},\\
G =&\mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\},\\
H =&\mathbf{R}^3 - \{(0,0,0),\,(1,0,0)\},\\
I =&\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1\right\},\\
J =&\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2\ge 1\right\},\\
K =&\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\right\},\\
L =&\mathbf{R}^3 - \left\{(x,0,0) \;\middle|\; -1\le x\le 1\right\},\\
M =&\mathbf{R}^3 - \left\{(x,0,0) \;\middle|\; x\ge 0\right\},\\
N =&\mathbf{R}^3 - \left\{(x,0,0) \;\middle|\; x\in\mathbf{R}\right\},\\
O =&\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; 1\le x^2+y^2\le 4\right\},\\
P =&\mathbf{R}^3 - \left\{(x,y,0) \;\middle|\; x^2+y^2=1\right\},\\
Q =&\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+y^2}\le -3\right\},\\
R =&\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+y^2}= -3\right\},\\
S =&\mathbf{R}^4 - \left\{(x,0,0,0) \;\middle|\; x\in\mathbf{R}\right\}.
\end{aligned}$$

81. Sia data la curva in $\mathbf{R}^3$ definita da

$$\gamma(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t^2,\,\frac{\sqrt{2}}{2}t^2,\,\frac{2}{3}t^3\right),$$

con $-1\le t\le 1$.

(62) Dire motivando la risposta se γ è una curva regolare.
(63) Calcolare la lunghezza di γ.
(64) Dire motivando la risposta se γ può essere riparametrizzata in modo da diventare una curva regolare.

82. Sia data la curva $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, con $t\in[-1,1]$, dove $x(t)$ e $y(t)$ sono definiti da:

$$\begin{cases} x(t)=2\cos t+t^3\\ y(t)=t^2+3\sin 2t.\end{cases}$$

Determinare l'equazione della retta tangente a $\gamma(t)$ in $t=0$.

83. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma y\,ds$, dove γ è la curva di equazione $x^2=y^3$, $(0\le x\le 1)$.

84. Sia data la forma differenziale $\omega=(\lambda+xy)e^{xy}dx+x^2e^{xy}dy$, dipendente da un parametro $\lambda\in\mathbf{R}$.

(65) Dire per quali valori del parametro λ la forma differenziale ω è esatta.
(66) Per ciascuno dei valori trovati al punto (65) trovare una funzione potenziale per ω.
(67) Per ciascuno dei valori trovati al punto (65) calcolare $\displaystyle\int_\gamma\omega$, dove $\gamma(t)=(t\cos t,t\sin t)$ con $t\in[0,2\pi]$.

85. Sia data la forma differenziale $\omega=\dfrac{5x+2y}{x^2+y^2}dx+\dfrac{5y-2x}{x^2+y^2}dy$.
Dire motivando la risposta

(68) se ω è chiusa sul suo dominio;
(69) se ω è esatta sul suo dominio e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale;
(70) se ω è esatta sul semipiano $\{x>0\}$ e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale.

86. Sia data la forma differenziale $\omega=xy^4e^{x^2+y^2}dx+y^3(\lambda+y^2)e^{x^2+y^2}dy$, dipendente da un parametro $\lambda\in\mathbf{R}$.

(71) Dire per quali valori del parametro λ la forma differenziale ω è esatta.
(72) Per ciascuno dei valori trovati al punto (71) trovare una funzione potenziale per ω.
(73) Per ciascuno dei valori trovati al punto (71) calcolare $\displaystyle\int_\gamma\omega$, dove $\gamma(t)=(t^2,t^3)$ con $t\in[0,1]$.

87. Sia data la forma differenziale $\omega=xye^{x^2-y^2}dx+(\lambda-y^2)e^{x^2-y^2}dy$, dipendente da un parametro $\lambda\in\mathbf{R}$.

(74) Dire per quali valori del parametro λ la forma differenziale ω è esatta.
(75) Per ciascuno dei valori trovati al punto (74) trovare una funzione potenziale per ω.
(76) Per ciascuno dei valori trovati al punto (74) calcolare $\displaystyle\int_\gamma\omega$, dove $\gamma(t)=(t^3,t^2)$ con $t\in[0,1]$.

88. Sia

$$\omega=\frac{4x^3}{1+x^4+y^4}dx+\frac{4y^3}{1+x^4+y^4}dy+\log(1+x^2+y^2+z^2)dz$$

e sia $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$ con γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4 definite da:

$$\begin{aligned}
\gamma_1&=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x=1,\ y=0,\ 0\le z\le 1\right\}\\
\gamma_2&=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2=1,\ y\ge 0,\ z=0\right\}\\
\gamma_3&=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x=-1,\ y=0,\ 0\le z\le 1\right\}\\
\gamma_4&=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2=1,\ y\le 0,\ z=1\right\}
\end{aligned}$$

ed orientate come illustrato nella figura seguente:

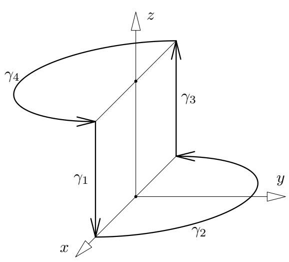

figura 5

(77) Calcolare $\int_\gamma\omega$.
(78) Cosa si può dire di $\int_\gamma\omega$ se γ_2 e γ_4 sono curve di altro tipo ma sempre con gli stessi estremi e giacenti sempre sui piani $z=0$ e $z=1$, rispettivamente?

89. Sia data la forma differenziale $\omega = -3\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \dfrac{6xy}{(x^2+y^2)^2}dy$, definita per $(x,y) \neq (0,0)$.

(79) Calcolare $\displaystyle\int_\Gamma \omega$, dove Γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 6.

(80) Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari contenute in $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ passanti da $(-1,2)$ a $(0,3)$. Si può affermare che $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$?

90. Siano date le forme differenziali

$$\begin{aligned}\omega_1 =& \frac{y}{(x+1)^2+y^2}dx - \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}dy,\\ \omega_2 =& \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy.\end{aligned}$$

(81) Dire se ω_1 e ω_2 sono chiuse in $\mathbf{R}^2\setminus\{(-1,0),(1,0)\}$.

(82) Calcolare $\int_{\gamma_1}\omega_1$, $\int_{\gamma_2}\omega_1$, $\int_{\gamma_1}\omega_2$ e $\int_{\gamma_2}\omega_2$, dove γ_1 e γ_2 sono le circonferenze di raggio 1 e di centro, rispettivamente, $(-1,0)$ e $(1,0)$ orientate in senso antiorario.

(83) Se γ è una curva chiusa contenuta in $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 4\}$, che cosa si può dire di $\int_\gamma(\omega_1+\omega_2)$?

78. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 87.

Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza in tre modi diversi le forme differenziali esatte.

Domanda 88.

Dare la definizione di omotopia tra curve e dire cosa significa che un insieme è semplicemente connesso.

Domanda 89.

Dire, motivando la risposta, che relazione c'è tra insiemi convessi e insiemi semplicemente connessi.

Domanda 90.

Enunciare il teorema che spiega come si comporta l'integrale di una forma differenziale chiusa su curve omotope.

Domanda 91.

Enunciare il teorema che caratterizza le forme esatte sugli insiemi semplicemete connessi.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 21

A.A. 2011-2012
21 Novembre 2011
ore 11.30-13.15

79. Contenuti della Lezione

La lezione è stata interamente dedicata allo svolgimento di esercizi sulle forme differenziali, presi da quelli proposti nella lezione precedente.

80. Lavoro proposto per casa

Lo studente svolga i problemi della lista che gli proponiamo nel capitolo successivo, tenendo presente che il problema **91** è più difficile degli altri.

81. Lista dei problemi

91. Dato l'insieme $A = \mathbf{R}^4 - \{(x,y,0,0) \mid x \in \mathbf{R},\, y \in \mathbf{R}\}$ dire, motivando la risposta, prima se è connesso per archi, poi se è semplicemente connesso.

92. Sia data la curva in $\mathbf{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \left(\cos t^2,\, \sin t^2,\, \frac{3}{4}t^2\right),$$

con $-\sqrt{\pi} \leq t \leq \sqrt{\pi}$.

(84) Dire motivando la risposta se γ è una curva regolare.

(85) Calcolare la lunghezza di γ.

(86) Dire motivando la risposta se γ può essere riparametrizzata in modo da diventare una curva regolare.

93. Sia data la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [-1,1]$, dove $x(t)$ e $y(t)$ sono definiti da:

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 + \sin 2t \\ y(t) = 3\cos 3t + 2t^2. \end{cases}$$

Determinare l'equazione della retta tangente a $\gamma(t)$ in $t = 0$.

94. Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{7x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{7y+x}{x^2+y^2}dy$.
Dire motivando la risposta

(87) se ω è chiusa sul suo dominio;

(88) se ω è esatta sul suo dominio e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale;

(89) se ω è esatta sul semipiano $\{x > 0\}$ e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **22**

A.A. 2011-2012
22 Novembre 2011
ore 11.30-13.15

82. Contenuti della Lezione

Per cominciare lo studente osservi gli esempi che seguono:

Esempio 1.

Cerchiamo tutte le funzioni $y(x)$ tali che

(90) $$y' = y.$$

La verifica diretta mostra che tutte le funzioni $y(x)$ del tipo

$$y(x) = Ke^x$$

vanno bene, per ogni valore reale assegnato al parametro K.
Si potrebbe inoltre dimostrare che, oltre ad esse, non vi sono altre funzioni che soddisfano (90). Omettiamo momentaneamente tale dimostrazione, visto che essa sarà conseguenza immediata di uno dei prossimi teoremi.
Osserviamo che prendendo l'insieme di tutte le soluzioni di (90), queste *coprono* tutto $\mathbf{R}^2$ senza mai intersecarsi tra loro.

Esempio 2.

Cerchiamo tutte le funzioni $y(x)$ tali che

(91) $$y' = y^2.$$

La verifica diretta mostra che tutte le funzioni $y(x)$ del tipo

$$y(x) = -\frac{1}{x-K}$$

soddisfano la (91), per ogni fissato valore reale assegnato al parametro K.
A queste va inoltre aggiunta la funzione identicamente nulla.
Oltre a queste non vi sono altre soluzioni, cosa che si può facilmente dimostrare applicando uno dei prossimi teoremi.
Notiamo che, anche questa volta, se si considera l'insieme di tutte le soluzioni di (91), esse *coprono* tutto $\mathbf{R}^2$ senza mai intersecarsi tra loro.

Uguaglianze come la (90) e la (91) e, più in generale, del tipo

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = G(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x)$$

prendono il nome di equazioni differenziali.
Diamo le seguenti definizioni:

Definizione 5.

Una coppia $(I, y(x))$, dove I è un **intervallo** aperto di R ed $y(x)$ è una funzione di classe C^n su I, si dice **soluzione** dell' equazione differenziale

(92) $$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = G(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x)$$

se, sostituita nella (92), rende il primo membro uguale al secondo.

Definizione 6.

Data l'equazione differenziale

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = G(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x)$$

diremo che il suo ordine è il massimo ordine di derivazione con cui vi compare $y(x)$.

Definizione 7.

Un'equazione differenziale si dirà **scritta in forma normale**, se si presenta esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo della $y(x)$, cioè se si presenta nella forma:

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, x).$$

Noi saremo interessati in particolare alle equazioni del primo ordine scritte in forma normale, cioè a quelle del tipo

(93) $$y' = f(x, y)$$

e di queste studieremo il cosidetto **problema di Cauchy**, cioè saremo interessati a trovare, tra tutte le soluzioni di (93), quella che passa per un fissato punto (x_0, y_0). Detto più formalmente, cercheremo $y(x)$ che soddisfi:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Negli esempi 1 e 2 abbiamo visto che i grafici di tutte le soluzioni dell'equazione considerata "coprono" tutto $\mathbf{R}^2$ senza mai intersecarsi tra loro.
Detto in altre parole: per ogni punto di $\mathbf{R}^2$ passa una e una sola soluzione dell'equazione differenziale.
Questo fatto non è casuale, infatti vale il seguente teorema:

Teorema 15. (di esistenza e unicita locale)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua ed $(x_0, y_0) \in A$.
Supponiamo inoltre che $f(x, y)$ soddisfi la cosidetta condizione di Lipschitz:

(94) esiste un intorno rettangolare $\mathcal{R}$ di (x_0, y_0), con $\mathcal{R} \subset A$, ed esiste una costante $L > 0$ tale che, comunque si prendano in $\mathcal{R}$ i punti (x, y_1) e (x, y_2), vale la disuguaglianza $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$.

Allora esistono I intorno di x_0 e J intorno di y_0 tali che $I \times J \subset A$ ed esiste unica $y(x)$ di classe C^1 su I ed a valori in J che soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Di tale teorema ometteremo la dimostrazione. In realtà un teorema simile continua a valere anche senza assumere nelle ipotesi la condizione di Lipschitz, tuttavia in tal caso, pur essendo possibile ugualmente dimostrare l'esistenza di una soluzione, non c'è più speranza di dimostrare la sua unicità, come chiariscono i seguenti esempi.

Esempio 3.

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La verifica diretta mostra che ne sono soluzioni sia la funzione identicamente nulla, sia la funzione definita da:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

anzi, in realtà, le funzioni che soddisfano il problema di Cauchy assegnato sono infinite, visto che vanno bene tutte le funzioni $y_K(x)$ della forma

$$y_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq K \\ \dfrac{(x-K)^2}{4} & \text{per } x > K. \end{cases}$$

qualsiasi sia il valore fissato per $K \geq 0$.
Ciò significa che, per il problema di Cauchy assegnato, la soluzione non è unica.
Ovviamente, in questo caso, non sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità, sia perchè il punto $(0, 0)$ non è interno al dominio di $f(x, y)$, sia perché $f(x, y)$, pur essendo continua, non soddisfa la condizione di Lipschitz.

Esempio 4.

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La verifica diretta mostra che ne sono soluzioni sia la funzione identicamente nulla, sia tutte le funzioni del tipo $y_K(x)$ e del tipo $-y_K(x)$ dove $y_K(x)$ è definita da

$$y_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq K \\ \left(\dfrac{2(x-K)}{3}\right)^{\frac{3}{2}} & \text{per } x > K. \end{cases}$$

qualsiasi sia il valore fissato per $K \geq 0$.
Ciò significa che, per il problema di Cauchy assegnato, la soluzione non è unica.
In questo caso, l'unica ipotesi venuta meno del Teorema di esistenza e unicità è la condizione di Lipschitz.

Nel caso più frequente, tuttavia, la unzione $f(x,y)$ è almeno di classe C^1. In tal caso, il fatto che la condizione di Lipschitz sia soddisfatta è conseguenza del teorema del valor medio e del fatto che attorno ad ogni punto (x_0,y_0) si riesce a *ritagliare* un intorno rettangolare nel quale $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sia limitata.

Se poi $f(x,y)$ è di classe C^∞, allora anche la soluzione $y(x)$ lo è.
Infatti, se $f(x,y)$ è di classe C^1, si possono derivare ambo i membri di

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

ottenendo

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) \tag{95}$$

da cui segue che $y''(x)$ è continua e quindi $y(x)$ è di classe C^2.
A questo punto, se $f(x,y)$ è di classe C^2 si può derivare di nuovo la (95) ed ottenere che $y(x)$ è di classe C^3.
Nel caso che $f(x,y)$ sia di classe C^∞, si può continuare a derivare ad oltranza, ottenendo che $y(x)$ è di classe C^n per ogni $n \in \mathbf{N}$, cioè che $y(x)$ è di classe C^∞.

83. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre svolga i problemi gli proponiamo nel capitolo successivo.
In particolare rifletta sul problema **100** che fornisce un'interessante legame tra la la teoria delle equazioni differenziali e il teorema delle funzioni implicite.

84. Lista dei problemi

95. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^5 - x^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Mostrare che $y(x)$ ha un punto di massimo relativo per $x = 1$.

96. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(y^2 + x^2\right)\sin y \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Mostrare che, finché è definita $y(x)$ è compresa tra quota 0 e quota π.

97. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^4 - x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Mostrare che $y(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale per $x = 0$.

98. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + \ln(1+x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Determinare il polinomio di Taylor di ordine 4 di $y(x)$ centrato in $x = 0$.

99. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\left(e^y - e^{x^3}\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Dire qual è il suo ordine di infinitesimo per $x \to 0$.

100. Sia $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; (x^2+y^2)e^{xy} = 4\right\}$ e sia $P \equiv (0,2)$.
Mostrare che Γ, in un intorno sufficientemente piccolo del punto P, coincide con il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{2x + (x^2+y^2)y}{2y + (x^2+y^2)x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Fatto ciò dire se, in un intorno di P, Γ sta sopra o sotto alla sua retta tangente in P.

85. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 92.

Dire cos'è un'equazione differenziale, qual è il suo ordine e cosa significa che è scritta in forma normale. Dire inoltre cos'è una sua soluzione.

Domanda 93.

Enunciare il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy, nel caso di un'equazione differenziale scalare del primo ordine.

Domanda 94.

Spiegare perché la condizione di Lipschitz è sicuramente verificata quando il secondo membro è una funzione $f(x,y)$ di classe C^1.

Domanda 95.

Esibire, motivando la risposta, un problema di Cauchy la cui soluzione non sia unica.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 23

A.A. 2011-2012
24 Novembre 2011
ore 15.00-16.45

86. Contenuti della Lezione

Il problema di cui ci vogliamo occupare in questa lezione è di stabilire quanto si può prolungare la soluzione $y(x)$ di un problema di Cauchy, la cui esistenza locale è già stata stabilita grazie alla teoria sviluppata nella lezione scorsa.
Per rendere più fluida la discussione premettiamo alcune definizioni.
Per prima cosa estendiamo il concetto di condizione di Lipschitz, già dato localmente, a tutto un insieme A nel modo seguente:

Definizione 8.

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbf{R}$. Diremo che f soddisfa la condizione di Lipschitz su A se

(96) per ogni $(x_0, y_0) \in A$, esiste un intorno rettangolare $\mathcal{R}$ di (x_0, y_0), con $\mathcal{R} \subset A$, ed esiste una costante $L > 0$ tale che, comunque si prendano in $\mathcal{R}$ i punti (x, y_1) e (x, y_2), vale la disuguaglianza $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$.

Fatto ciò introduciamo il concetto di prolungamento e soluzione massimale.

Definizione 9.

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbf{R}$ soddisfacente la condizione di Lipschitz su A. Siano inoltre $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluzioni dell'equazione:

$$y' = f(x, y) \tag{97}$$

rispettivamente sugli intervalli I_1 e I_2.
Diremo che $y_2(x)$ è un prolungamento di $y_1(x)$ se $I_1 \subset I_2$ ed inoltre $y_1(x)$ e $y_2(x)$ coicidono sull'intervallo I_1.
Diremo inoltre che una funzione $y_3(x)$, che sia soluzione di (97) sull'intervallo I_3, è una soluzione massimale, se non ha nessun altro prolungamento oltre a se stessa.

La soluzione massimale di un problema di Cauchy esiste sempre, come garantisce il seguente teorema

Teorema 16. (sui prolungamenti e le soluzioni massimali)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.
Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{98}$$

Allora valgono le seguenti proprietà:

(99) se I_1 e I_2 sono due intervalli aperti contenenti x_0 e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni di (98) definite rispettivamente su I_1 e I_2, allora esse coincidono su tutto $I_1 \cap I_2$;

(100) Esiste un unico intervallo $I_{\max}$ e un unica funzione $y_{\max}(x)$ definita su $I_{\max}$ tale che $y_{\max}(x)$ è soluzione massimale di (98).

Dimostrazione del Teorema 16.

Cominciamo con la dimostrazione di (99).
Detto $I = I_1 \cap I_2$, sappiamo che I è aperto e contiene x_0 e quindi $y_1(x)$ e $y_2(x)$ coincidono almeno per $x = x_0$. Supponiamo, per assurdo che esista $x_s \in I$ tale che $y_1(x_s) \neq y_2(x_s)$.
Per fissare le idee supponiamo che $x_s > x_0$ (il caso $x_s < x_0$ è completamente analogo e il suo svolgimento viene lasciato allo studente). Consideriamo ora l'insieme V di tutti i punti, compresi tra x_0 e x_s per i quali $y_1(x)$ e $y_2(x)$ coincidono, cioè sia

$$V = \left\{ x \in I \;\middle|\; x_0 \leq x \leq x_s \text{ e } y_1(x) = y_2(x) \right\}.$$

Tale insieme è non vuoto (perchè contiene almeno x_0), limitato (perchè contenuto in $[x_0, x_s)$), e chiuso (perché $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono continue).
Quindi V ha un massimo, che indicheremo con x_m, strettamente minore di x_s. Cioè esiste un punto x_m che è il più grande, tra i punti minori di x_s per i quali $y_1(x)$ e $y_2(x)$ coincidono.

Se dunque indichiamo con y_m il valore che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ assumono in x_m e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_m) = y_m \end{cases} \tag{101}$$

otterremo che sia $y_1(x)$ che $y_2(x)$ sono soluzioni di tale problema di Cauchy, anche se assumono valori diversi per ogni $x \in (x_m, x_s)$. Ciò significa che (101) ha due soluzioni locali distinte, in contrasto col teorema di esistenza e unicità. Abbiamo cioè ottenuto una contraddizione supponendo che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ non coincidessero su tutto l'intervallo $I_1 \cap I_2$, di conseguenza ciò non può accadere.
Ciò completa la dimostrazione di (99).
Passiamo a dimostrare (100).
Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le coppie $(y_I(x), I)$ tali che I è un intervallo contenente x_0 e $y_I(x)$ è una soluzione di (101) definita su I. Indichiamo inoltre con $I_{\max}$ l'unione di tutti gli intervalli I tali che $(y_I(x), I) \in \mathcal{F}$. Infine osserviamo che, per ogni $\overline{x} \in I_{\max}$, tutti gli $y_I(x)$ tali che $\overline{x} \in I$ assumono lo stesso valore, che indicheremo con $\overline{y}$. Definiamo dunque la funzione $y_{\max}(x)$ in modo tale che $y_{\max}(\overline{x}) = \overline{y}$. Questo per ogni $\overline{x} \in I_{\max}$.
Di conseguenza, per ogni $(y_I(x), I) \in \mathcal{F}$, $y_{\max}(x)$ ristretto a I concide con $y_I(x)$. Quindi $(y_{\max}(x), I_{\max}) \in \mathcal{F}$ e risulta il prolungamento di ogni altra $(y_I(x), I) \in \mathcal{F}$. Visto che $\mathcal{F}$ contiene tutte le soluzioni di (101) possiamo affermare che $(y_{\max}(x), I_{\max})$ è soluzione massimale di (101) ed è l'unica.

Rimane ora il problema di stabilire quanto grande è l'intervallo di esistenza massimale, in particolare dire quando la soluzione $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e quando non lo è.
Contrariamente a quanto si potrebbe pensare ad una prima analisi superficiale, il fatto che $f(x, y)$ sia definita su tutto $\mathbf{R}^2$ non basta a garantire che le soluzioni di $y' = f(x, y)$ siano definite su tutto $\mathbf{R}$, come mostra l'esempio (2) nella lezione precedente.
Per garantire la prolungabilità della soluzione $y(x)$ per tutti i valori di x per cui l'equazione ha senso servono ipotesi aggiuntive sulla $f(x, y)$, come mostra il seguente teorema:

Teorema 17. (di esistenza globale)

Siano $A = (a, b) \times \mathbf{R}$, $(x_0, y_0) \in A$, ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua e soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.
Supponiamo inoltre che $f(x, y)$ sia sublineare, cioè che soddisfi la condizione:

(102) esistono due funzioni $h(x)$ e $k(x)$, continue, non negative e definite su tutto (a, b) tali che, per ogni $(x, y) \in A$ si ha $|f(x, y)| \leq h(x)|y| + k(x)$.

Allora la soluzione massimale $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è definita su tutto (a, b).

Omettiamo la dimostrazione di tale teorema, tuttavia avvertiamo lo studente interessato che tra qualche lezione potrà costruire da solo una semplicissima dimostrazione di questo teorema, utilizzando il teorema del confronto (che vedremo presto) e il fatto che, per le equazioni differenziali lineari, si riesce a trovare una soluzione esplicita.
Vediamo invece fin da subito una prima applicazione di tale teorema con il seguente esempio:

Esempio 5.

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right). \tag{103}$$

sono prolungabili a tutto $\mathbf{R}$.
Per dimostrarlo, oltre ad osservare che $\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ è definita su tutto $\mathbf{R}^2$, bisogna anche verificare che sia sublineare.
A tale scopo verifichiamo preliminarmente che per $t \geq 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$\ln(1 + t^2) \leq t \tag{104}$$

Infatti, se consideriamo la funzione differenza $\psi(t) = t - \ln(1 + t^2)$, otteniamo

$$\psi'(t) = 1 - \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{(t - 1)^2}{1 + t^2} \geq 0,$$

da cui segue che $\psi(t)$ è sempre crescente, cosa che, combinata col fatto che $\psi(0) = 0$, implica che $\psi(t) \geq 0$ per $t \geq 0$, cioè che vale la (104) per $t \geq 0$.
A questo punto siamo in grado di verificare che $\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ è sublineare. Infatti, applicando (104) con $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) \leq \sqrt{x^2 + y^2} &\leq \sqrt{x^2 + 2|xy| + y^2} = \\ &= \sqrt{\left(|x| + |y|\right)^2} = |x| + |y| = 1 \cdot |y| + |x| \end{aligned}$$

Ciò significa $\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ che soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza gliobale con $h(x) = 1$ e $k(x) = |x|$, quindi ogni soluzione $y(x)$ di (103) ha come intervallo massimale di definizione $(-\infty, +\infty)$.

Un altro teorema che ci viene in aiuto quando vogliamo stabilire fino a quando una soluzione è prolungabile è il seguente:

Teorema 18. (di prolungabilità fuori dai compatti)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$, ed $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua e soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.

Sia inoltre K un compatto contenente (x_0, y_0) e contenuto in A e sia (a,b) l'insieme di definizione della soluzione massimale $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Allora esistono c e d, con $a < c < d < b$, tali che per $x \in (a,c) \cup (d,b)$ il grafico di $y(x)$ sta tutto fuori da K.

Ecco un modo tipico di utilizzare il teorema **18**:

Esempio 6.

Mostrare che la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$(105) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{y^4 - 8y}{1 + x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
A tale scopo, stavolta, non è possibile usare il teorema di esistenza globale, perché non è soddisfatta l'ipotesi di sublinearità.
Invece notiamo subito che l'equazione $y' = \dfrac{y^4 - 8y}{1 + x^2 + y^2}$ ha due soluzioni costanti: le due rette $y = 0$ e $y = 2$.
Di conseguenza, visto che la soluzione $y(x)$ di (105) ha il dato iniziale nella zona compresa tra le due soluzioni costanti, finché essa è prolungabile rimarrà confinata nella striscia $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y < 2\}$, perchè altrimenti verrebbe violato il teorema di unicità.
Tuttavia, grazie al teorema di prolungabilità fuori dai compatti, $y(x)$ può sempre essere prolungata fino ad uscire dal rettangolo $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le y \le 2, \ -b \le x \le b\}$, per ogni $b > 0$.
Poiché però, per quanto appena affermato, $y(x)$ non può intersecare il lato superiore ed il lato inferiore di K, per essere prolungata fino ad uscirne deve necessariemente essere definita per ogno $x \in [-b,b]$. Visto che questo vale per ogni $b > 0$, ciò vuol dire che $y(x)$ è definita su tutto $\mathbf{R}$, che è quanto volevamo dimostrare.

Il metodo appena descritto è di uso molto frequente.
Il primo passo di tale metodo è di trovare un motivo per poter affermare che la soluzione $y(x)$, se esiste, rimane confinata entro certe *barriere* che stanno sopra e sotto ad una certa regione.
Nel caso dell'esempio **6**, tali barriere erano costituite dalle soluzioni costanti dell'equazione differenziale.
Fatto ciò si invoca il teorema di prolungamento fuori dai compatti per affermare che $y(x)$ deve comunque poter essere prolungata fino ad uscire da ogni regione compatta, delimitata sopra e sotto dalle *barriere* prima trovate. In base a ciò si conclude che $y(x)$ può essere prolungata fino a uscire da ognuna di tali regioni *di lato* e, di conseguenza, può essere prolungata a tutto $\mathbf{R}$.

87. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre svolga i problemi gli proponiamo nel capitolo successivo: nessuno di essi è particolarmente difficile.

88. Lista dei problemi

101. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(xy) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \in \mathbf{R}$.

102. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^x + y\cos^2(xy) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \in \mathbf{R}$.

103. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x - y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \in \mathbf{R}$.

104. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy\left(e^{-x^2} - y^2\right) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \in \mathbf{R}$.

105. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\left(y^2 - y\right)^{999} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \le 2$.

89. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 96.

Per un problema di Cauchy, dire cos'è il prolungamento di una soluzione, cos'è una soluzione massimale e spiegare perchè esiste sempre.

Domanda 97.

Enunciare il teorema di esistenza globale.

Domanda 98.

Esibire un problema di Cauchy per il quale non valga la tesi del teorema di esistenza globale, ovvero tale che, pur essendo il secondo membro $f(x,y)$ definito su tutto $\mathbf{R}^2$, la sua soluzione $y(x)$ non sia prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.

Domanda 99.

Enunciare il teorema della prolungabilità delle soluzioni fuori dai compatti.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 24

A.A. 2011-2012
28 Novembre 2011
ore 11.30-13.15

90. Contenuti della Lezione

Nella lezione precedente abbiamo accennato a come si può utilizzare il teorema di prolungabilità fuori dai compatti, per mostrare che la soluzione $y(x)$ di un opportuno problema di Cauchy è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
Grosso modo si trattava di trovare delle *barriere* dall'alto e dal basso che $y(x)$, finché viveva, non poteva superare. Combinando questo fatto con il teorema della prolungabilità fuori dai compatti si poteva affermare che, finché $y(x)$ era compresa tra tali *barriere*, poteva essere ulteriormente prolungata.
Nella lezione precedente le uniche *barriere* che avevamo a disposizione erano le altre soluzioni dell'equazione differenziale (in genere le soluzioni costanti), in quanto esse non potevano essere *scavalcate* da $y(x)$ a causa del teorema di unicità.
In questa lezione vogliamo dare allo studente un altro strumento per costruire *barriere*, introducendo i concetti di **soprasoluzione** e di **sottosoluzione** con la seguente definizione:

Definizione 10.

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua e soddisfacente la condizione di Lipschitz su A. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = f(x, y). \tag{106}$$

Diremo che una funzione $y(x)$ di classe C^1 su in intervallo I e il cui grafico sia contenuto in A è una **soprasoluzione** di (106) se soddisfa la condizione

$$y' \geq f(x, y)$$

per ogni $x \in I$.
Analogamente diremo che è una **sottosoluzione**, se invece soddisfa

$$y' \leq f(x, y).$$

La loro utilizzabilità come *barriere* è garantita dai due seguenti teoremi:

Teorema 19. (della soprasoluzione)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, (x_0, y_1) e (x_0, y_2) due punti di A e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.
Siano inoltre $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due funzioni di classe C^1 entrambe definite su un intervallo (a, b) contenente x_0, tali che il loro grafico sia tutto contenuto in A ed inoltre si abbia:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f(x, y_1(x)) \\ y_1(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{107}$$

e

$$\begin{cases} y_2'(x) \geq f(x, y_2(x)) \\ y_2(x_0) = y_2 \end{cases} \tag{108}$$

Allora possiamo affermare che:

(109) se $y_2 \geq y_1$ allora, per $x_0 \leq x < b$ si ha $y_2(x) \geq y_1(x)$;

(110) se $y_2 \leq y_1$ allora, per $a < x \leq x_0$ si ha $y_2(x) \leq y_1(x)$.

Teorema 20. (della sottosoluzione)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, (x_0, y_1) e (x_0, y_2) due punti di A e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua soddisfacente la condizione di Lipschitz su A.
Siano inoltre $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due funzioni di classe C^1 entrambe definite su un intervallo (a, b) contenente x_0, tali che il loro grafico sia tutto contenuto in A ed inoltre si abbia:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f(x, y_1(x)) \\ y_1(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{111}$$

e

$$\begin{cases} y_2'(x) \leq f(x, y_2(x)) \\ y_2(x_0) = y_2 \end{cases} \tag{112}$$

Allora possiamo affermare che:

(113) se $y_2 \leq y_1$ allora, per $x_0 \leq x < b$ si ha $y_2(x) \leq y_1(x)$;

(114) se $y_2 \geq y_1$ allora, per $a < x \leq x_0$ si ha $y_2(x) \geq y_1(x)$.

Detto in modo più rozzo, il teorema della soprasoluzione garantisce che una soprasoluzione, al crescere di x, può essere *scavalcata* da una soluzione solo in una direzione: passando da sopra a sotto. Infatti il teorema in questione dice proprio che, se in un punto x_0 la soluzione sta sotto alla soprasoluzione, allora, prolungando la soluzione in avanti, questa continua a stare sotto. Al contrario, se in x_0 la soluzione sta sopra, prolungandola all'indietro continua a stare sopra.
Per le sottosoluzioni succede il contrario: al crescere di x, una sottosoluzione può essere *scavalcata* da una soluzione solo passando da sotto a sopra.
A lezione è stata svolta la dimostrazione del solo punto (109) e, per giunta, solo nel caso con le disuguaglianze strette. Ometteremo quindi di riportare la dimostrazione fatta e, di conseguenza, non richiederemo allo studente di saperla.
Vogliamo invece proporgli un modo suggestivo di immaginare geometricamente soluzioni, soprasoluzioni e sottosoluzioni.
Si immagini di disegnare, in ogni punto di A, un versore con pendenza uguale a $f(x, y)$.
Allora i grafici delle soluzioni sono delle curve che, in ogni punto (x, y) per cui passano, sono tangenti a tali vettori.
Invece una curva che sia il grafico di una soprasoluzione (sottosoluzione) avrà sempre pendenza maggiore (minore) o uguale di quella data dal campo di versori.

Come esempio di applicazione dei teoremi su sopra e sottosoluzioni, a lezione è stata mostrata l'estendibilità in avanti della $y(x)$ del problema **106**: infatti la retta $y = x$ è una soprasoluzione e $y = -x$ è una sottosoluzione, quindi $y(x)$ quando viene prolungata in avanti, continua ad essere compresa tra tali rette.
Ciò significa che per *uscire* dal compatto $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| \leq x,\ 1 \leq x \leq b\}$ deve poter essere prolungata oltre $x = b$.
Essendo questo vero per ogni $b \geq 1$, si ottiene che $y(x)$ è prolungabile fino a $+\infty$.

91. Lavoro proposto per casa

Consigliamo lo studente di terminare il problema **106** studiando anche la prolungabilità fino a $-\infty$.
Provi inoltre a fare anche il problema **107**, che è po' più semplice. Per tale problema può essere di aiuto osservare che, per l'equazione che vi compare, per ogni $x > 0$ la retta $y = 0$ è una sottosoluzione, mentre la curva $y = \sqrt[3]{x}$ è una soprasoluzione.
Per quanto riguarda il comportamento asintotico della soluzione del problema **106**, ci si può accontentare di dimostrare che essa tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$ e a $-\infty$ per $x \to +\infty$.
Tuttavia è possibile essere più precisi e dimostrare che ha per asintoto obliquo la retta $y = -x$, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.
Anche per il comportamento asintotico della soluzione del problema **107** ci si può limitare a dimostrare che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.
Anche in questo caso però è possibile essere più precisi e dimostrare che, per $x \to +\infty$, il suo grafico si *schiaccia* su quello della curva $y = \sqrt[3]{x}$.

92. Lista dei problemi

106. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Mostrare che è estendibile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne la monotonia e il comportamento asintotico.

107. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x - y^3 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Mostrare che è estendibile in avanti fino a $+\infty$ e studiarne la monotonia e il comportamento asintotico.

93. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 100.

Dire cos'è una soprasoluzione e una sottosoluzione di un'equazione differenziale.

Domanda 101.

Enunciare i teoremi della soprasoluzione e della sottosoluzione.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 25

A.A. 2011-2012
29 Novembre 2011
ore 11.30-13.15

94. Contenuti della Lezione

In questa lezione vogliamo presentare un modo suggestivo di riformulare i teoremi della soprasoluzione e della sottosoluzione.
Si tratta del seguente

Teorema 21. (del confronto)

Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, (x_0, y_1) e (x_0, y_2) due punti di A ed $f, g : A \to \mathbf{R}$ due funzioni continue soddisfacenti la condizione di Lipschitz su A. Supponiamo inoltre che per ogni $(x, y) \in A$ si abbia $f(x, y) \le g(x, y)$.
Si considerino i due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{115}$$

e

$$\begin{cases} y'(x) = g(x, y) \\ y(x_0) = y_2 \end{cases} \tag{116}$$

Indichiamo con $y_1(x)$ la soluzione di (115) e con $y_2(x)$ la soluzione di (116) e sia (a, b) un intervallo contenente x_0 sul quale sia $y_1(x)$ che $y_2(x)$ siano definite.
Allora possiamo affermare che:

(117) se $y_1 \le y_2$ allora, per $x_0 \le x < b$ si ha $y_1(x) \le y_2(x)$;

(118) se $y_1 \ge y_2$ allora, per $a < x \le x_0$ si ha $y_1(x) \ge y_2(x)$.

Si noti che non c'è bisogno di dimostrarlo: basta osservare che la soluzione di (115) è una sottosoluzione per l'equazione del problema di Cauchy (116).
Tuttavia, pur trattandosi praticamente della stessa cosa, enunciata in modo un po' diverso, il suo utilizzo risulta, in un certo senso più trasparente.
Ad esempio, nel problema (108) il fatto che la soluzione $y(x)$ abbia un asintoto verticale quando la si prolunga in avanti, deriva dal fatto che, grazie al teorema del confronto, essa è minorata dalla soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{119}$$

che è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Come lo studente può facilmente immaginare, la parte difficile sta nello scegliere opportunamente un problema di Cauchy come il (119) con il quale confrontare quello assegnato, che sia anche abbastanza semplice da poterne trovare la soluzione esplicitamente.
A questo punto del corso è quindi opportuno anche imparare a risolvere esplicitamente alcune classi di equazioni differenziali.
In questa lezione sono state trattate quelle a variabili separabili, che lo studente può trovare trattate nel paragrafo **16.2** del libro di testo.

95. Lavoro proposto per casa

Come sempre lo studente continui a rispondere alle domande di verifica.
Inoltre è invitato ad affrontare gli studi qualitativi della lista sotto riportata, che non siano già stati trattati a lezione. L'unica domanda un po' difficile è la (125).
In parallelo si eserciti anche a risolvere le equazioni a variabili separabili. Per cominciare può prendere gli esercizi **16.3**, **16.4** e **16.5** del libro di testo e i problemi della lista del paragrafo successivo che vanno dal **111** al **122**

96. Lista dei problemi

108. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dopo aver mostrato che $y(x)$ non è estendibile né fino a $+\infty$ né fino a $-\infty$, studiarne monotonia e comportamento asintotico.

109. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

(120) Mostrare che, finché $y(x)$ è prolungabile in avanti, si ha $y(x) \ge 2x$.

(121) Dopo aver verificato che su tutto l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \ge 1,\ y \ge 2x\}$ si ha $f(x, y) \ge \frac{3}{4}y^2$, utilizzare il teorema del confronto per mostrare che, prolungando $y(x)$ a destra, ad un certo punto si trova un asintoto verticale.

110. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

dove α è un parametro reale.

(122) Mostrare che se α è non negativo e sufficientemente piccolo allora $y(x)$ è estendibile in avanti fino a $+\infty$ e si ha $\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$.

(123) Mostrare che se α è positivo e sufficientemente grande allora esiste $x_0 > 0$ tale che $\lim_{x \to x_0^-} y(x) = +\infty$.

(124) Mostrare che per ogni $\alpha \ge 0$ $y(x)$ è estendibile all'indietro fino a $-\infty$.

(125) Mostrare che esiste uno e un solo valore positivo di α per il quale $y(x)$ non ricade né nella situazione descritta nel punto (122), né in quella descritta da (123), e studiare monotonia e comportamento asintotico per $x \to +\infty$ di tale $y(x)$.

(126) Dire cosa succede per α negativo, sia prolungando in avanti che indietro.

111. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\ln x}{y^3} \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

112. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 + y^3}{y^2} x^2 \\ y(0) = \sqrt[3]{1 - e}. \end{cases}$$

113. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^3}{y} e^{x^2 - y^2} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

114. Sia data l'equazione differenziale

$$y' = y^2 - 1. \tag{127}$$

(128) Trovare la soluzione di (127) che soddisfa la condizione $y(0) = 2$.

(129) Trovare la soluzione di (127) che soddisfa la condizione $y(0) = 1$.

(130) Trovare la soluzione di (127) che soddisfa la condizione $y(0) = \frac{1}{2}$.

115. Trovare la soluzione $y(x)$ di
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} \cos^2 y \\ y(1) = -\dfrac{19\pi}{4}. \end{cases}$$

116. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 2y}{2xy - 2x} \\ y(1) = \lambda, \end{cases}$$

nel caso in cui:

(131) $\lambda = 3$,

(132) $\lambda = 2$,

(133) $\lambda = -1$,

(134) $\lambda = 0$.

117. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -xy \ln^3 y \\ y(0) = \lambda, \end{cases}$$

nel caso in cui:

(135) $\lambda = e$,

(136) $\lambda = 1$,

(137) $\lambda = \frac{1}{e}$.

118. Sia data l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{xy^2 - 3xy + 2x}{1+x^4}. \tag{138}$$

(139) Trovare la soluzione di (138) che soddisfa la condizione $y(0) = 3$.
(140) Trovare la soluzione di (138) che soddisfa la condizione $y(0) = 2$.
(141) Trovare la soluzione di (138) che soddisfa la condizione $y(0) = \frac{3}{2}$.
(142) Trovare la soluzione di (138) che soddisfa la condizione $y(0) = 1$.

119. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{2y\sqrt{x}} \\ y(1) = \lambda, \end{cases}$$

nel caso in cui:
(143) $\lambda = 3$,
(144) $\lambda = 2$,
(145) $\lambda = -1$,
(146) $\lambda = -2$.

120. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(y^2-3)\ln(y^2-3)}{2xy} \\ y(1) = \lambda, \end{cases}$$

nel caso in cui:
(147) $\lambda = 3$,
(148) $\lambda = 2$,
(149) $\lambda = -\frac{7}{4}$,
(150) $\lambda = -2$.

121. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x\left(e^{y^2}-e\right)}{ye^{y^2}} \\ y(0) = \lambda, \end{cases}$$

nel caso in cui:
(151) $\lambda = \sqrt{2}$,
(152) $\lambda = 1$,
(153) $\lambda = -1$,
(154) $\lambda = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

122. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y-4\sqrt{y}}{x} \\ y(1) = \lambda, \end{cases}$$

nel caso in cui:
(155) $\lambda = 9$,
(156) $\lambda = 4$,
(157) $\lambda = 1$.
(158) Dire se la soluzione trovata al punto (157) è unica.

97. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 102.

Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per i problemi di Cauchy.

Domanda 103.

Dire cos'è un'equazione differenziale a variabili separabili e dire come diventa la condizione di Lipschitz per tale tipo di equazioni.

Domanda 104.

Spiegare come si trovano tutte le soluzioni di un'equazione differenziale a variabili separabili.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **26**

A.A. 2011-2012
2 Dicembre 2011
ore 15.00-16.45

98. Contenuti della Lezione

A lezione si è trattato delle equazioni differenziali lineari del primo ordine. Lo studente può trovare tale argomento nel paragrafo **16.1** del libro di testo.

99. Lavoro proposto per casa

Come sempre lo studente continui a rispondere alle domande di verifica.

Inoltre si eserciti a risolvere le equazioni lineari del primo ordine. Per cominciare può prendere gli esercizi **16.1** e **16.2** del libro di testo e i problemi della lista del paragrafo successivo che vanno dal **123** al **131**.

Inoltre continui ad esercitarsi negli studi qualitativi con gli esercizi che vanno **132** al **139**.

100. Lista dei problemi

123. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' + \left(2x - \dfrac{3}{x}\right) y = 2x^4 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

124. Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' + \left(\dfrac{5}{x} - 3x^2\right) y = \dfrac{2e^{x^3}}{x^4} \\ y(1) = 2e. \end{cases}$$

125. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' - 2xy = \dfrac{e^{x^2}}{1+x^2} \\ y(1) = \pi e. \end{cases}$

126. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' - \dfrac{3}{x}y = x^2 \ln x \\ y(e) = 0. \end{cases}$

127. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) y = \dfrac{6e^{x-3}}{1+x^2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$

128. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' + \left(2x + \dfrac{2}{x}\right) y = \dfrac{e^{1-x^2}}{x^2+x^4} \\ y\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3e^2}. \end{cases}$

129. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' + \left(1 + \dfrac{2}{x}\right) y = 1 \\ y(1) = e+1. \end{cases}$

130. Trovare la soluzione $y(x)$ di $\begin{cases} y' + \dfrac{4}{x}y = \dfrac{1}{x^4+x^6} \\ y\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{4\pi}{27}. \end{cases}$

131. Trovare la soluzione di
$$\begin{cases} y' + \dfrac{9}{x} y = 5e^{x^5} \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

132. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = x \arctan(x^2 - y) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(159) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(160) Mostrare che $y(x)$ è una funzione pari.
(161) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(162) Mostrare che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.
(163) Calcolare l'ordine di infinito di $y(x)$ per $x \to +\infty$ (facoltativo).

133. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = xy - x^3y^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(164) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne crescenza e decrescenza.
(165) Dire, motivando la risposta se $y(x)$ è una funzione pari.
(166) Mostrare che $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$.
(167) Trovare l'ordine di infinitesimo di $y(x)$ per $x \to +\infty$ (facoltativo).

134. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = -xy\left(y^2 - e^{-x^2}\right) \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(168) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne crescenza e decrescenza.
(169) Dire, motivando la risposta se $y(x)$ è una funzione pari.
(170) Mostrare che $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$.
(171) Trovare l'ordine di infinitesimo di $y(x)$ per $x \to +\infty$ (facoltativo).

135. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = (y^2 + x^2)\cos y \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

(172) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(173) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(174) Dire, motivando la risposta, se esistono $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ e, in caso affermativo, trovarli.

136. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = (y - x)(y^2 - 2y) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(175) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(176) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(177) Dire, motivando la risposta, se esistono $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ e, in caso affermativo, trovarli.

137. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(178) Studiare la monotonia di $y(x)$ in un intorno di $x = 0$.
(179) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza è un intervallo limitato (a, b) e studiare monotonia e asintoti di $y(x)$ su (a, b).

138. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = e^{x^2y} \sin y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(180) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.
(181) Studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$.
(182) Dire, motivando la risposta, se esistono $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ e, in caso affermativo, trovarli.

139. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = e^{xy} \sin y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, dire se per $x \to -\infty$ è infinitesima oppure no.

101. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 105.

Dire cos'è un'equazione differenziale lineare del primo ordine (omogenea e non omogenea) e dire come diventa la condizione di Lipschitz per tale tipo di equazioni.

Domanda 106.

Spiegare come si trovano tutte le soluzioni di un'equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea.

Domanda 107.

Spiegare perchè, quando si vuole trovare la soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea, basta trovarne una soluzione particolare, se si conosce già la soluzione generale dell'omogenea associata.

Domanda 108.

Spiegare come si trova una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, utilizzando il metodo della variazione delle costanti.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 27

A.A. 2011-2012
5 Dicembre 2011
ore 11.30-13.15

102. Contenuti della Lezione

Scopo di questa lezione e di quelle immediatamente successive è quello di estendere parte della teoria sviluppata per le equazioni di primo ordine, alle equazioni di ordine superiore e, quando è possibile, anche ai sistemi.
Il primo passo è quello di riconoscere che ogni equazione di ordine n si può trasformare in un opportuno sistema di ordine 1.
Infatti, data la generica equazione differenziale di ordine n

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y'', y', y, x\right) = 0, \tag{183}$$

ponendo

$$y(x) = u_1(x),\ y'(x) = u_2(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x) = u_n(x),$$

si ottiene il sistema di primo ordine in n incognite

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \quad\vdots \\ u_{n-1}' = u_n \\ F(u_n', u_n, u_{n-1}, \ldots, u_3, u_2, u_1, x) = 0. \end{cases} \tag{184}$$

In particolare si noti che se (183) è in forma normale, anche il sistema (184) lo è.
Inoltre, se le condizioni iniziali per la (183) sono date nella forma

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

allora quelle che si ottengono per la (184) dopo il cambio di variabili sono nella forma

$$u_1(x_0) = y_0,\ u_2(x_0) = y_1,\ u_3(x_0) = y_2,\ \ldots, u_n(x_0) = y_{n-1}.$$

Notiamo infine che, il procedimento appena utilizzato per una singola equazione di ordine n può essere applicato anche per trasformare un sistema di ordine superiore ad 1, in un sistema di ordine 1.
Ciò significa che per sviluppare una teoria generale non è restrittivo restringersi al primo ordine.
Detto questo, il primo teorema di cui ci serve la generalizzazione ai sistemi è il teorema di esistenza e unicità, che lo studente può trovare enunciato a pagina **434** del libro di testo e di cui omettiamo la dimostrazione.
Il passo successivo è quello di affrontare le equazioni lineari di ordine n (e in generale i sistemi di equazioni lineari di primo ordine con n incognite) ottenendo che, nel caso omogeneo, l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione n. Teorema e dimostrazione fatti a lezione sono quasi identici a quelli riportati nel paragrafo **16.3.1** del libro di testo, che va studiato per intero (dimostrazioni comprese).
Infine, nel caso di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti, è stato enunciato il seguente

Teorema 22.

Sia data l'equazione

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{185}$$

dove $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}$.
Consideriamo l'equazione algebrica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{186}$$

che prende il nome di equazione caratteristica associata a (185).
Allora possiamo affermare che:

(187) se λ_0 è una soluzione reale di (186) di molteplicità k allora le k funzioni date da $u_0(x) = e^{\lambda_0 x}$, $u_1(x) = xe^{\lambda_0 x}$, $\ldots, u_{k-1}(x) = x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ sono tutte soluzioni di (185);

(188) se $\alpha + i\beta$ è una soluzione complessa di (186) di molteplicità k allora anche la sua coniugata $\alpha - i\beta$ è una soluzione complessa di (186) di molteplicità k e le $2k$ funzioni date da $u_0(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $u_1(x) = xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $\ldots, u_{k-1}(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$ e $v_0(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $v_1(x) = xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $\ldots, v_{k-1}(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ sono tutte soluzioni di (185);

(189) mettendo insieme tutte le funzioni ottenute nei modi (187) e (188) si ottiene una base per lo spazio delle soluzioni di (185).

Tale teorema sarà dimostrato nella lezione successiva, ma è opportuno che lo studente si eserciti fin da ora a utilizzarlo per risolvere le equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.

103. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la sua preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre si eserciti a risolvere le equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, applicando il teorema **22**.
A tale scopo può utilizzare la lista di equazioni che trova nel paragrafo seguente, che è abbastanza completa.
Tenga però presente che la parte difficile di questo tipo di esercizio non è applicare il teorema **22** (cosa che risulta piuttosto meccanica) ma determinare le radici del polinomio caratteristico. In particolare la maggior parte degli studenti incontra difficoltà nel determinare le radici di un polinomio di grado maggiore di 2, soprattutto se si è costretti a utilizzare particolari metodi di scomposizione come il raccglimento parziale o l'utilizzo del teorema di Ruffini.
Gli studenti che scoprono di avere carenze di questo tipo (che riguardano non il corso di analisi, ma la precedente preparazione scolastica) sono invitati a pensarci per tempo ricorrendo, se necessario, alle ore di ricevimento studenti.
In ogni caso, per esercitarsi, è opportuto che risolvano *tutte* le equazioni proposte.

104. Lista dei problemi

140. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ **(b)** $y'' + 3y' - 10y = 0$
(c) $y'' - 4y' = 0$ **(d)** $y'' - 4y = 0$
(e) $y'' + y = 0$ **(f)** $y'' + 9y = 0$
(g) $y'' - 2y' + y = 0$ **(h)** $y'' = 0$
(i) $y'' + 4y' + 4y = 0$ **(j)** $y'' + 2y' + 2y = 0$
(k) $y'' - 2y' + 5y = 0$ **(l)** $y'' + 4y' + 13y = 0$
(m) $y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$ **(n)** $y'' + y' + y = 0$

141. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine tre:

(a) $y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0$ **(b)** $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$
(c) $y^{(3)} - y'' = 0$ **(d)** $y^{(3)} - 2y'' - 4y' + 8y = 0$
(e) $y^{(3)} + y' = 0$ **(f)** $y^{(3)} - y = 0$
(g) $y^{(3)} + 8y = 0$ **(h)** $y^{(3)} = 0$
(i) $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$ **(j)** $y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$
(k) $y^{(3)} - 7y'' + 12y' = 0$ **(l)** $y^{(3)} - 15y'' + 75y' - 125y = 0$
(m) $y^{(3)} + y'' + 4y' + 4y = 0$ **(n)** $y^{(3)} - 7y' + 6y = 0$
(o) $y^{(3)} + 2y'' - 23y' - 60y = 0$ **(p)** $y^{(3)} + 3y'' - 4y = 0$
(q) $y^{(3)} + 5y'' + 7y' - 13y = 0$ **(r)** $y^{(3)} - y'' - 5y' - 3y = 0$

142. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine quattro:

(a) $y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0$ **(b)** $y^{(4)} - 26y'' + 25y = 0$
(c) $y^{(4)} - y = 0$ **(d)** $y^{(4)} + 4y = 0$
(e) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ **(f)** $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0$
(g) $y^{(4)} - 5y^{(3)} + 6y'' + 4y' - 8y = 0$ **(h)** $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 10y'' + 18y' + 9y = 0$
(i) $y^{(4)} - 9y'' - 4y' + 12y = 0$ **(j)** $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$

143. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine superiore a quattro:

(a) $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$ **(b)** $y^{(6)} - 2y^{(3)} + y = 0$
(c) $y^{(7)} - y' = 0$ **(d)** $y^{(10)} - 16y^{(6)} - y^{(4)} + 16y = 0$
(e) $y^{(10)} - y'' = 0$ **(f)** $y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$

105. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 109.

Spiegare come la generica equazione differenziale di ordine n si può trasformare in un sistema di equazioni differenziali di ordine 1, evidenziando il fatto che se l'equazione è in forma normale, anche il sistema che si ottiene da essa lo è.

Domanda 110.

Enunciare il teorema di esistenza e unicità locale per i sistemi di equazioni differenziali del primo ordine.

Domanda 111.

Enunciare e dimostrare il teorema relativo alla dimensione dello spazio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.

Domanda 112.

Enunciare il teorema che fornisce la formula risolutiva per un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 28

A.A. 2011-2012
6 Dicembre 2011
ore 11.30-13.15

106. Contenuti della Lezione

Per facilitare la dimostrazione del teorema **22** faremo alcune considerazioni sulla nozione di operatore differenziale lineare a coefficienti costanti, e ne chiariremo alcune proprietà che, oltre a facilitare la dimostrazione del teorema **22**, hanno valore di per se e permettono di interpretare meglio alcune proprietà delle equazioni differenziali, attraverso il linguaggio unificante dell'algebra lineare.
Per cominciare richiamiamo la seguente definizione:

Definizione 11.

Sia $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ un polinomio a coefficienti reali di grado n. A partire da esso definiamo l'applicazione $L_P : C^n(\mathbf{R}) \to C(\mathbf{R})$ definita da:

$$f(x) \mapsto a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \ldots + f'(x)\lambda + a_0 f(x)$$

Diremo che L_P è l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti associato al polinomio $P(\lambda)$ o, equivalentemente che $P(\lambda)$ è il polinomio caratteristico di L_P.
Inoltre useremo la notazione:

$$L_P(f) = \left(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0I\right)(f) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_iD^i\right)(f) = \sum_{i=0}^{n} a_iD^i(f)$$

intendendo con D^k l'operatore derivata $k-$esima e con I l'operatore identità e adottando la convenzione che $D^0 = I$.

È immediato verificare che l'operatore L_P appena definito è, effettivamente, lineare.
L'operazione di composizione ha una semplice, ma importante, proprietà descritta dalla seguente proposizione:

Proposizione 23.

Siano L_1 ed L_2 due operatori lineari a coefficienti costanti, aventi come polinomi caratteristici rispettivamente $P_1(\lambda) = a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0$ e $P_2(\lambda) = b_m\lambda^m+b_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+b_1\lambda+b_0$.
Allora l'operatore composizione $L_1\circ L_2$ ha come polinomio caratteristico il polinomio prodotto $P_1(\lambda)\cdot P_2(\lambda)$.

Dimostrazione della Proposizione 23.

Per ogni $f \in C^{n+m}(\mathbf{R})$ si ha

$$\begin{aligned}(L_1\circ L_2)(f) = L_1(L_2(f)) &= \sum_{i=0}^{n} a_iD^i(L_2(f)) = \sum_{i=0}^{n} a_iD^i\left(\sum_{j=0}^{m} b_jD^j(f)\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i\sum_{j=0}^{m} b_jD^i\left(D^j(f)\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_ib_jD^{i+j}(f) = \sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=s} a_ib_j\right)D^s(f)\end{aligned}$$

Quindi il polinomio caratteristico di $L_1\circ L_2$ è

$$P(\lambda) = \sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=s} a_ib_j\right)\lambda^s$$

che è proprio il prodotto dei polinomi $P_1(\lambda)$ e $P_2(\lambda)$.

Come semplice (ma importante) conseguenza della proposizione **23**, abbiamo che la composizione tra operatori differenziali lineari a coefficienti costanti è commutativa.
Siamo ora in grado di dimostrare due lemmi che ci permetteranno una notevole semplificazione nella dimostrazione del teorema **22**

Lemma 24.

Presi $\lambda \in \mathbf{R}$ e k intero strettamente positivo, sia L l'operatore definito da

$$L = (D-\lambda I)^k \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{(D-\lambda I)\circ(D-\lambda I)\circ\ldots\circ(D-\lambda I)}^{k}.$$

Allora per ogni $s = 0, 1, \ldots, k-1$ si ha $L(x^s e^{\lambda x}) = 0$.

Dimostrazione del Lemma 24.

Osserviamo che:

$$(D - \lambda I)\left(e^{\lambda x}\right) = \lambda e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0 \tag{190}$$

e più in generale:

$$(D - \lambda I)\left(x^s e^{\lambda x}\right) = s x^{s-1} e^{\lambda x} + \lambda x^s e^{\lambda x} - \lambda x^s e^{\lambda x} = s x^{s-1} e^{\lambda x}. \tag{191}$$

Combinando (190) e (191) otteniamo che, applicando $s+1$ volte l'operatore $D - \lambda I$ alla funzione $x^s e^{\lambda x}$, si ottiene 0.
Quindi, se $k - 1 \geq s$, allora

$$(D - \lambda I)^k \left(x^s e^{\lambda x}\right) = (D - \lambda I)^{k-s-1} \left((D - \lambda I)^{s+1} \left(x^s e^{\lambda x}\right)\right) = (D - \lambda I)^{k-s-1} (0) = 0.$$

Lemma 25.

Presi $a, b \in \mathbf{R}$ e k intero strettamente positivo, sia L l'operatore definito da

$$L = \left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2) I\right)^k.$$

Allora per ogni $s = 0, 1, \ldots, k-1$ si ha $L(x^s e^{ax} \cos bx) = 0$ e $L(x^s e^{ax} \sin bx) = 0$.

Dimostrazione del Lemma 25.

Osserviamo che:
(192)

$$\begin{aligned}
&\left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2) I\right)\left(e^{ax} \cos bx\right) = \\
&= D\left(D\left(e^{ax} \cos bx\right) - 2a e^{ax} \cos bx\right) + (a^2 + b^2)\left(e^{ax} \cos bx\right) = \\
&= D\left(a e^{ax} \cos bx - b e^{ax} \sin bx - 2a e^{ax} \cos bx\right) + (a^2 + b^2)\left(e^{ax} \cos bx\right) = \\
&= D\left(-a e^{ax} \cos bx - b e^{ax} \sin bx\right) + (a^2 + b^2)\left(e^{ax} \cos bx\right) = \\
&= -a^2 e^{ax} \cos bx + ab e^{ax} \sin bx - ab e^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx + (a^2 + b^2)\left(e^{ax} \cos bx\right) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo si ottiene che:

$$\left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2) I\right)\left(e^{ax} \sin bx\right) = 0 \tag{193}$$

e più in generale che, presi comunque due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, di ha:
(194)

$$\begin{aligned}
&\left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2) I\right)\left(P(x) e^{ax} \sin bx + Q(x) e^{ax} \cos bx\right) = \\
&\qquad = \left(P''(x) - 2bQ'(x)\right) e^{ax} \sin bx + \left(Q''(x) + 2bP'(x)\right) e^{ax} \cos bx \\
&\qquad \stackrel{\text{def}}{=} p(x) e^{ax} \sin bx + q(x) e^{ax} \cos bx
\end{aligned}$$

dove si è convenuto di dare il nome di $p(x)$ e $q(x)$ ai due polinomi $P''(x) - 2bQ'(x)$ e $Q''(x) + 2bP'(x)$ rispettivamente.
Si noti che se $P(x)$ e $Q(x)$ hanno entrambi grado minore o uguale a un intero m allora $p(x)$ e $q(x)$ hanno entrambi grado minore o uguale a $m - 1$.
Come conseguenza immediata otteniamo che, se $P(x)$ e $Q(x)$ hanno entrambi grado minore o uguale a s, allora applicando $s+1$ volte l'operatore $\left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2) I\right)$ alla funzione $P(x) e^{ax} \sin bx + Q(x) e^{ax} \cos bx$ si ottiene 0.
In particolare ciò accase quando $P(x) = x^s$ e $Q(x) = 0$ e quando $P(x) = 0$ e $Q(x) = x^s$
Quindi, se $k - 1 \geq s$, allora

$$\begin{aligned}
&\left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2) I\right)^k \left(x^s e^{\lambda x} \sin bx\right) = \\
&\qquad = \left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2) I\right)^{k-s-1} \left((D - \lambda I)^{s+1} \left(x^s e^{\lambda x} \sin bx\right)\right) = \\
&\qquad = \left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2) I\right)^{k-s-1} (0) = 0
\end{aligned}$$

e analogamente:

$$\left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2) I\right)^k \left(x^s e^{\lambda x} \cos bx\right) = 0.$$

Grazie ai lemmi **24** e **25**, siamo ora in grado di dimostrare il teorema **22**

Dimostrazione del Teorema 22.

Con le notazioni fin qui introdotte, l'equazione differenziale:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{195}$$

può essere riscritta

$$L(y) = 0$$

dove L è l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti avente come polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0.$$

In altre parole, l'insieme di tutte la soluzioni dell'equazione differenziale (195) è il nucleo dell'operatore lineare L.
Osserviamo infine che, se $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ è una radice del polinomio caratteristico con molteplicità k, allora esiste un polinomio $q(\lambda)$ tale che

$$p(\lambda) = q(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_0)^k.$$

Di conseguenza, grazie alla proposizione 23, l'equazione (195) può essere riscritta come

$$L_q \circ (D - \lambda_0 I)^k (y) = 0, \tag{196}$$

dove L_q è l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti avente $q(\lambda)$ come polinomio caratteristico.
Ciò significa che se

$$(D - \lambda_0 I)^k (y) = 0 \tag{197}$$

allora $y(x)$ è anche soluzione di (195).
Notiamo a questo punto che, grazie al lemma **24**, tutte le k funzioni:

$$e^{ax}, \quad x e^{ax}, \quad x^2 e^{ax}, \quad \ldots \quad x^{k-1} e^{ax}$$

soddisfano (197) e quindi sono soluzioni di (195).
Ciò dimostra (187).
In modo del tutto analogo, se $\alpha + i\beta$ è una radice complessa del polinomio caratteristico con molteplicità k, allora anche la sua coniugata $\alpha - i\beta$ è una radice complessa del polinomio caratteristico con la stessa molteplicità e quindi esiste un polinomio $h(\lambda)$ tale che

$$p(\lambda) = h(\lambda) \cdot \left(\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)^k.$$

Di conseguenza, grazie alla proposizione 23, l'equazione (195) può essere riscritta come

$$L_h \circ \left(D^2 - 2\alpha D + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) I\right)^k (y) = 0 \tag{198}$$

dove L_h è l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti avente $h(\lambda)$ come polinomio caratteristico.
Otteniamo dunque che se

$$\left(D^2 - 2\alpha D + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) I\right)^k (y) = 0$$

allora $y(x)$ è anche soluzione di (195).
Notiamo a questo punto che, grazie al lemma **25**, tutte le $2k$ funzioni:

$$\begin{array}{lllll}
e^{ax} \sin bx, & x e^{ax} \sin bx, & x^2 e^{ax} \sin bx, & \ldots & x^{k-1} e^{ax} \sin bx \\
e^{ax} \cos bx, & x e^{ax} \cos bx, & x^2 e^{ax} \cos bx, & \ldots & x^{k-1} e^{ax} \cos bx
\end{array}$$

soddisfano (198) e quindi sono soluzioni di (195).
Ciò dimostra (188).
A questo punto, ricordiamo che l'insieme di tutte le soluzioni di (195) è uno spazio vettoriale di dimensione n e che, grazie al teorema fondamentale dell'algebra, le funzioni elencate nei punti (187) e (188) sono in tutto n.
Ciò significa che, per dimostrare che tali n funzioni costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni, basterà verificare che esse sono linearmente indipendenti, cosa che si fa abbastanza facilmente prendendo in condiderazione i loro comportamenti a $\pm\infty$.

107. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la sua preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Inoltre continui a esercitarsi a risolvere le equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti assegnate nella scorsa lezione.

108. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 113.

Dare la definizione di operatore lineare di ordine n a coefficienti costanti e dire cos'è il suo polinomio caratteristico.

Domanda 114.

Dati due operatori differenziali lineari a coefficienti costanti, dire, motivando la risposta, come si ottiene dai loro polinomi caratteristici, il polinomio caratteristico della loro composizione.

Domanda 115.

Mostrare che la composizione di operatori differenziali lineari a coefficienti costanti è commutativa.

Domanda 116.

Interpretare l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanticome nucleo di un'opportuno operatore differenziale lineare.

Domanda 117.

Dimostrare il teorema che fornisce la formula risolutiva per un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 29

A.A. 2011-2012
9 Dicembre 2011
ore 15.00-16.45

109. Contenuti della Lezione

L'intera lezione è stata dedicata a terminare le dimostrazioni iniziate nella lezione precedente e a fare esercizi sulle equazioni lineari omogenee.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 30

A.A. 2011-2012
12 Dicembre 2011
ore 11.30-13.15

110. Contenuti della Lezione

Per prima cosa abbiamo fatto vedere che la soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea è data da

$$y(x) = y_O(x) + y_P(x)$$

dove $y_O(x)$ è la soluzione generale dell'omogenea associata e $y_P(x)$ una soluzione particolare della non omogenea.
Questo fatto è immediata conseguenza del seguente teorema:

Teorema 26.

Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{199}$$

dove $a_{n-1}(x)$, $a_{n-2}(x), \ldots, a_1(x)$, $a_0(x)$ e $b(x)$ sono continue sull'intervallo (a, b).
Allora la loro differenza $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$ risolve l'equazione omogenea associata alla (199), cioè:

$$v^{(n)} + a_{n-1}(x)v^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)v' + a_0(x)v = 0. \tag{200}$$

Dimostrazione del Teorema 26.

Per comodità definiamo l'operatore

$$L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)I \tag{201}$$

che è banalmente lineare grazie alla linearità dell'operazione di derivazione.
In tal modo l'equazione (199) può scriversi:

$$L(y) = b(x). \tag{202}$$

Applicando tale operatore a $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$ si ottiene:

$$L(v) = L\left(y_1(x) - y_2(x)\right) = L\left(y_1(x)\right) - L\left(y_2(x)\right) = b(x) - b(x) = 0 \tag{203}$$

dove nel terzo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni di (202).
La (203) significa appunto che $v(x)$ soddisfa (200), che è quanto volevamo dimostrare.

Visto che, almeno per le equazioni lineari a coefficienti costanti, siamo in grado di trovare la soluzione generale nel caso omogeneo, quello che ci resta da fare a questo punto è trovare una soluzione particolare della non omogenea.
A tale scopo impareremo due metodi.
Nel primo (metodo della variazione delle costanti) sapendo che la soluzione generale dell'omogenea associata è data da

$$Y_O(x) = A_1 v_1(x) + \ldots + A_n v_n(x)$$

con $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{R}$, consiste nel cercare una soluzione della non omogenea del tipo

$$Y_P(x) = A_1(x)v_1(x) + \ldots + A_n(x)v_n(x).$$

Tale metodo si appoggia al teorema **29**, che abbiamo enunciato e dimostrato nel caso particolare delle equazioni di ordine 2 con il teorema **27**. Per comodità, una parte della dimostrazione di tale teorema è stata fatta a parte nel lemma **28**.

Teorema 27.

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{204}$$

con $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ continue sull'intervallo (a, b) e siano $u(x)$ e $v(x)$ due funzioni di classe C^2 su (a, b), linearmente indipendenti e che soddisfano l'equazione omogenea associata alla (204).
Allora esistono due funzioni $A(x)$ e $B(x)$, di classe C^1 su (a, b) che soddisfano le condizioni

$$\begin{cases} u(x)A'(x) + v(x)B'(x) = 0 \\ u'(x)A'(x) + v'(x)B'(x) = c(x). \end{cases} \tag{205}$$

Inoltre la funzione

$$y(x) = A(x)u(x) + B(x)v(x) \tag{206}$$

è di classe C^2 su (a,b) ed è soluzione dell'equazione (204).

Lemma 28.

Data l'equazione differenziale

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{207}$$

con $a(x)$ e $b(x)$ continue sull'intervallo (a,b), siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due funzioni di classe $C^2(a,b)$ che la soddisfano.
Allora è equivalente affermare che:

(208) per ogni $x \in (a,b)$ il determinante di $\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$ è diverso da zero;

(209) $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione del Lemma 28.

L'implicazione (208) $\Rightarrow$ (209) è ovvia perché, se per assurdo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ fossero linearmente dipendenti, cioè se fosse $y_2(x) = Ky_1(x)$ per un'opportuna costante $K \in \mathbf{R}$, allora il determinante in questione sarebbe addirittura nullo per ogni $x \in (a,b)$ in quanto:

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = y_1(x)\left(Ky_1(x)\right)' - \left(Ky_1(x)\right)y_1'(x) = Ky_1(x)y_1'(x) - Ky_1(x)y_1'(x) = 0.$$

Viceversa, mostriamo ora che vale anche l'implicazione (209) $\Rightarrow$ (208).
Infatti, se per assurdo esistesse $x_0 \in (a,b)$ che rende nullo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}, \tag{210}$$

ciò significherebbe che le due colonne di (210) sono linearmente dipendenti, cioè che esiste una costante $K \in \mathbf{R}$ tale che

$$\begin{aligned} y_2(x_0) &= Ky_1(x_0) \\ y_2'(x_0) &= Ky_1'(x_0) \end{aligned} \tag{211}$$

Di conseguenza, se indichiamo con α e β rispettivamente i valori $Ky_1(x_0)$ e $Ky_1'(x_0)$, si ottiene che le funzioni $Ky_1(x)$ e $y_2(x)$ soddisfano lo stesso problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

e quindi, per il teorema di unicità, segue che $y_2(x) = Ky_1(x)$ per ogni $x \in (a,b)$, in contraddizione col fatto che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono indipendenti.
È quindi assurdo l'aver supposto che esista un punto x_0 che renda nullo il determinante della matrice (210)

Dimostrazione del Teorema 27.

Grazie al Lemma **28** la matrice

$$\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}, \tag{212}$$

ha determinante diverso da zero per ogni $x \in (a,b)$.
Quindi il sistema (205) può sempre essere esplicitato rispetto a $A'(x)$ e $B'(x)$, ottenendo

$$\begin{cases} A'(x) = \dfrac{v(x)c(x)}{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)} \\ B'(x) = \dfrac{-u(x)c(x)}{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)} \end{cases} \tag{213}$$

In particolare si noti che $A'(x)$ e $B'(x)$ sono continue, visto che tutte le funzioni che compaiono nei secondi membri di (213) sono continue e i denominatori sono diversi da zero perché uguali al determinante di (212).
Basta quindi prendere

$$\begin{cases} A(x) = \displaystyle\int \frac{v(x)c(x)}{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}\,dx \\ B(x) = \displaystyle\int \frac{-u(x)c(x)}{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}\,dx \end{cases} \tag{214}$$

per ottenere due funzioni $A(x)$ e $B(x)$ di classe C^1 che soddisfino le condizioni (205).
Mostriamo ora che, se $A(x)$ e $B(x)$ sono le funzioni C^1 che risolvono (205), allora la funzione

$$y(x) = A(x)u(x) + B(x)v(x) \tag{215}$$

è di classe C^2 su tutto (a,b) e risolve l'equazione non omogenea (204).
Intanto $y(x)$ è sicuramente almeno di classe C^1, visto che tali sono $A(x)$, $B(x)$, $u(x)$ e $v(x)$.
A questo punto, derivando ambo i membri di (215), si ottiene

$$y'(x) = A'(x)u(x) + B'(x)v(x) + A(x)u'(x) + B(x)v'(x). \tag{216}$$

Ma, grazie alla prima equazione di (205), si ottiene che $A'(x)u(x)+B'(x)v(x)$ è identicamente nullo, quindi la (216) diventa

$$y'(x) = A(x)u'(x) + B(x)v'(x). \tag{217}$$

In particolare da (217) segue che $y'(x)$ è di classe C^1 e quindi $y(x)$ è di classe C^2.
Derivando ancora la (217) si ottiene

$$y''(x) = A(x)u''(x) + B(x)v''(x) + A'(x)u'(x) + B'(x)v'(x). \tag{218}$$

Finalmente, sostituendo (215), (217) e (218) nel primo membro dell'equazione (204), si ottiene:

$$\begin{aligned} y''(x) &+ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = \\ &= Au'' + Bv'' + A'u' + B'v' + a \cdot (Au' + Bv') + b \cdot (Au + Bv) = \\ &= A \cdot (u'' + au' + bu) + B \cdot (v'' + av' + bv) + (A'u' + B'v') = \\ &= A \cdot 0 + B \cdot 0 + c(x) = \\ &= c(x) \end{aligned}$$

dove $u'' + au' + bu = 0$ e $v'' + av' + bv = 0$ perché sappiamo che u e v sono soluzioni dell'omogenea associata a (204), mentre $A'u' + B'v' = c(x)$ grazie alla seconda equazione di (205).
Quindi possiamo concludere che $y(x)$ è soluzione di (204).
Ciò completa la dimostrazione.

Teorema 29.

Sia data l'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{219}$$

con $a_{n-1}(x)$, $a_{n-2}(x), \ldots, a_1(x)$, $a_0(x)$ e $b(x)$ continue sull'intervallo (a,b) e siano $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n($
n funzioni di classe C^n su (a,b), linearmente indipendenti e che soddisfano l'equazione omogenea associata alla (219).
Allora esistono n funzioni $A_1(x)$, $A_2(x), \ldots, A_n(x)$, di classe C^1 su (a,b) che soddisfano le condizioni

$$\begin{cases} u_1(x)A_1'(x) + \ldots u_n(x)A_n'(x) = 0 \\ u_1'(x)A_1'(x) + \ldots u_n'(x)A_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ u_1^{(n-2)}(x)A_1'(x) + \ldots u_n^{(n-2)}(x)A_n'(x) = 0 \\ u_1^{(n-1)}(x)A_1'(x) + \ldots u_n^{(n-1)}(x)A_n'(x) = b(x) \end{cases} \tag{220}$$

Inoltre la funzione

$$y(x) = A_1(x)u_1(x) + \ldots + A_n(x)u_n(x) \tag{221}$$

è di classe C^n su (a,b) ed è soluzione dell'equazione (219).

Il metodo della variazione delle costanti risulta un po' lungo nel caso che l'ordine dell'equazione sia alto.
In tal caso, se il termine non omogeneo $b(x)$ dell'equazione risulta di tipo particolare, si riesce a dimostrare che esiste una soluzione di una forma ben precisa, per cui basterà cercarla tra le funzioni di tale forma.
I dettagli di come deve essere $b(x)$ e di che forma va cercata la soluzione $y(x)$ sono contenuti nel teorema **30**.
Il punto fondamentale è che, mentre nel metodo della variazione delle costanti le cose da determinare sono le funzioni $A_1(x), \ldots, A_n(x)$, in questo secondo metodo le cose da determinare sono solo dei numeri: i coefficienti dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$ che compaiono nella formula (223) del teorema che segue.

Teorema 30.

Sia data l'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = b(x) \tag{222}$$

con a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots, a_1$, $a_0 \in \mathbf{R}$ e $b(x) = K(x)e^{ax}\cos bx$ (oppure $b(x) = K(x)e^{ax}\sin bx$) dove $K(x)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado k. Inoltre, indicato con $P(\lambda)$ il polinomio caratteristico dell'equazione (222) (cioè $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$), supponiamo che $a + bi$ sia radice di $P(\lambda)$ con molteplicità m (dove $m = 0$ significa che non è radice).
Allora esiste una soluzione di (222) del tipo:

$$y(x) = x^m e^{ax}\left(A(x)\cos bx + B(x)\sin bx\right) \tag{223}$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi di grado al più k.

Dimostrazione del Teorema 30.

Per fare la dimostrazione distinguiamo due casi: $b = 0$ e $b \neq 0$.
Per il caso $b = 0$ osserviamo che si tratta di dimostrare che se $b(x)$ è della forma:

$$b(x) = K(x)e^{ax}$$

allora l'equazione (222) ha una soluzione del tipo

$$y(x) = x^m A(x)e^{ax}$$

dove $A(x)$ è un polinomio che ha al più lo stesso grado di $K(x)$ ed m è la molteplicità di a come radice di $P(\lambda)$.
Per dimostrarlo basta osservare che

$$P(\lambda) = (\lambda - a)^m Q(\lambda)$$

dove $Q(\lambda)$ è un opportuno polinomio di grado $n - m$ e quindi l'equazione (222) può essere riscritta:

$$(D - aI)^m Q(D)(y) = K(x)e^{ax}. \tag{224}$$

Se ora applichiamo ad ambo i membri di (224) l'operatore $(D - aI)^{k+1}$, si ottiene

$$(D - aI)^{k+1}(D - aI)^m Q(D)(y) = (D - aI)^{k+1}K(x)e^{ax},$$

cioè

$$(D - aI)^{m+k+1} Q(D)(y) = 0. \tag{225}$$

Ciò significa che ogni soluzione di (222) è anche soluzione di (225) e quindi è della forma

$$y(x) = (x^m A(x) + H(x))e^{ax} + \text{altri termini} \tag{226}$$

dove $A(x)$ è un polinomio di grado al più k, $H(x)$ di grado al più $m-1$ e gli "altri termini" sono soluzioni dell'equazione $Q(D)(y) = 0$.
Osserviamo però che, applicando l'operatore $P(D)$ alla $y(x)$ definita dalla (226) si ottiene:

$$P(D)(y) = P(D)(x^m A(x)e^{ax}) + P(D)(H(x)e^{ax}) + P(D)(\text{altri termini}) = P(D)(x^m A(x)e^{ax}) + 0 + 0$$

Ciò significa che, visto che c'è una soluzione del tipo (226), ce n'è anche una del tipo

$$y(x) = x^m A(x)e^{ax} \tag{227}$$

che è quanto volevamo dimostrare.
Per quanto riguarda la dimostrazione del caso $b \neq 0$ si procede quasi in modo identico, con l'unica differenza che la (224) si scrive invece

$$\left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I\right)^m Q(D)(y) = K(x)e^{ax} \cos bx. \tag{228}$$

e l'operatore da applicare ad ambo i membri è $\left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I\right)^{k+1}$.

111. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 118.

Enunciare e dimostrare il teorema che permette di trovare la soluzione generale di un'equazione non omogenea, note che siano una sua soluzione particolare e la soluzione generale dell'omogenea associata.

Domanda 119.

Descrivere il metodo della variazione delle costanti nel caso di un'equazione lineare di ordine n e dimostrarlo nel caso particolare delle equazioni di ordine 2.

Domanda 120.

Enunciare e dimostrare il teorema che permette di trovare una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti nel caso particolare in cui il secondo membro sia della forma $K(x)a^{ax}\cos(bx)$, con $K(x)$ polinomio.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **31**

A.A. 2011-2012
13 Dicembre 2011
ore 11.30-16.15

112. Contenuti della Lezione

L'intera lezione è stata dedicata a esercizi sulle equazioni lineari non omogenee.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 32

A.A. 2011-2012
16 Dicembre 2011
ore 15.00-16.45

113. Contenuti della Lezione

L'intera lezione è stata dedicata a esercizi sugli studi qualitativi.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 33

A.A. 2011-2012
19 Dicembre 2011
ore 11.30-13.15

114. Contenuti della Lezione

La maggior parte degli argomenti della lezione sono contenuti nel paragrafo **14.1** del libro di testo.
Tuttavia alcuni dettagli relativi alle proprietà delle partizioni di un rettangolo e alle somme di Riemann, nonchè le dimostrazioni di alcuni teoremi, sul libro sono assenti o trattati in modo marginale.
Per comodità dello studente li riportiamo qui di seguito.
Per cominciare ricordiamo cosa significa che una partizione è più fine di un'altra:

Definizione 12.

Siano $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$ due partizioni del rettangolo $K = [a, b] \times [c, d]$.
Diremo che $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ è più fine di $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$ se $\mathcal{P}_3 \subset \mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_4 \subset \mathcal{P}_2$.

Osserviamo che, in base alla definizione **12**, possono benissimo esistere partizioni dello stesso rettangolo tali che nessuna delle due è più fine dell'altra (basta ad esempio prendere $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_3$ in modo che nessuna delle due contenga l'altra).
Tuttavia, prese comunque due partizioni dello stesso rettangolo, $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$, anche se esse non fossero tra loro confrontabili, è sempre possibile trovare una partizione confrontabile con entrambe e di esse più fine.
Infatti basta prendere $\mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6$ con $\mathcal{P}_5 = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_6 = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_4$

La relazione d'ordine tra le partizioni data dalla definizione **12**, è importante perché permette di dimostrare una proprietà di monotonia per le somme di Riemann inferiori e superiori, che non sarebbe vera se avessimo adottato delle definizioni di *finezza di una partizione* più semplici e solo apparentemente più naturali.
Tale proprietà di monotonia è espressa dal seguente teorema:

Teorema 31.

Siano $K = [a, b] \times [c, d]$ ed $f : K \to \mathbf{R}$ una funzione limitata.
Siano inoltre $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$ due partizioni di K tali che $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ è più fine di $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$.
Allora sono vere le seguenti disuguaglianze:

$$s\left(f, \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4\right) \le s\left(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2\right)$$
$$S\left(f, \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4\right) \ge S\left(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2\right).$$

Dimostrazione del Teorema 31.

Dire che $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ è più fine di $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$. significa che $\mathcal{P}_1$ si può ottenere da $\mathcal{P}_3$ aggiungendo un numero finito di punti e, analogamente, $\mathcal{P}_2$ si può ottenere da $\mathcal{P}_4$ aggiungendo un numero finito di punti.
Per dimostrare i teorema basterà dunque dimostrare che quando aggiungo un punto a $\mathcal{P}_3$ o a $\mathcal{P}_4$, il valore della somma di Riemann inferiore non può diminuire, mentre quello della somma superiore non può aumentare.
Riportiamo qui di seguito la dimostrazione per $\mathcal{P}_3$; quella per $\mathcal{P}_4$ è del tutto analoga ed è lasciata come utile esercizio allo studente.
Supponiamo dunque che $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_4 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ e che $\mathcal{P}_3 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ e $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3 \cup \{\overline{x}\}$ con $x_{p-1} < \overline{x} < x_p$, per un opportuno indice p compreso tra 1 e n.
Se, come al solito, poniamo $\mathrm{Q}_{ij} = [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$ ed $\mathrm{m}_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in \mathrm{Q}_{ij}} f(x, y)$, abbiamo:

(229)

$$\begin{aligned} s\left(f, \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4\right) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{area}\left(\mathrm{Q}_{ij}\right) \mathrm{m}_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{area}\left(\mathrm{Q}_{pj}\right) \mathrm{m}_{pj} + \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i\neq p}} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{area}\left(\mathrm{Q}_{ij}\right) \mathrm{m}_{ij} \le \\ &\le \sum_{j=1}^{m} \left(\operatorname{area}\left(\mathrm{Q'}_{pj}\right) \mathrm{m'}_{pj} + \operatorname{area}\left(\mathrm{Q''}_{pj}\right) \mathrm{m''}_{pj}\right) + \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i\neq p}} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{area}\left(\mathrm{Q}_{ij}\right) \mathrm{m}_{ij}. \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato le notazioni

$$\mathrm{Q'}_{pj} = [x_{p-1}, \overline{x}) \times [y_{j-1}, y_j)$$
$$\mathrm{Q''}_{pj} = [\overline{x}, x_p) \times [y_{j-1}, y_j)$$

e

$$\mathrm{m'}_{pj} = \inf_{(x,y)\in \mathrm{Q'}_{pj}} f(x, y)$$
$$\mathrm{m''}_{pj} = \inf_{(x,y)\in \mathrm{Q''}_{pj}} f(x, y),$$

dalle quali segue che l'ultima disuguaglianza è vera, perché Q_{pj} è unione disgiunta di Q'_{pj} e Q''_{pj}, $m'_{pj} \geq m_{pj}$ e $m''_{pj} \geq m_{pj}$.
A questo punto, perché dalla (229) segua la tesi, basta osservare che

$$s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) = \sum_{j=1}^{m} \left(\text{area}\left(Q'_{pj}\right) m'_{pj} + \text{area}\left(Q''_{pj}\right) m''_{pj}\right) + \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i \neq p}} \sum_{j=1}^{m} \text{area}\left(Q_{ij}\right) m_{ij}.$$

La proprietà di monotonia espressa dal teorema precedente è l'ingrediente principale per la dimostrazione della proprietà enunciata nel prossimo teorema, che è necessario per poter affermare che l'integrale inferiore di una funzione f è sempre minore o uguale del suo integrale superiore.

Teorema 32.

Siano $K = [a, b] \times [c, d]$, $f : K \to \mathbf{R}$ una funzione limitata e $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$ due partizioni di K. Allora, comunque siano state scelte le partizioni, vale la disuguaglianza:

$$s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4).$$

Dimostrazione del Teorema 32.

La dimostrazione è ovvia nel caso in cui sia

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$
$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_4 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$$

Infatti se, come al solito, per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$ poniamo:

$$Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$$
$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x, y)$$
$$M_{ij} = \sup_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x, y)$$

si ha:

(230) $$s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \text{area}\left(Q_{ij}\right) m_{ij}$$

e

(231) $$S(f, \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \text{area}\left(Q_{ij}\right) M_{ij}$$

per cui la tesi segue banalmente confrontando termine a termine la (230) con la (231) e ricordando che per ogni i e j si ha $m_{ij} \leq M_{ij}$.
Se invece $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$ sono, in generale, partizioni diverse, basterà prendere la partizione $\mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6$ con $\mathcal{P}_5 = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_6 = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_4$.
Poiché $\mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6$ è più fine sia di $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ che di $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$ otteniamo

(232) $$s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq s(f, \mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6)$$

e

(233) $$S(f, \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4) \geq S(f, \mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6).$$

Questo perchè sappiamo che, passando ad una partizione più fine, le somme di Riemann inferiori possono solo aumentare e quelle superiori possono solo diminuire.
Combinando (232) e (233) col fatto (appena dimostrato) che

$$s(f, \mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6) \leq S(f, \mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6),$$

si ottiene che:

$$s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq s(f, \mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6) \leq S(f, \mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6) \leq S(f, \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4).$$

Ciò completa la dimostrazione.

Riportiamo infine qui di seguito un teorema che nel libro di testo adottato è enunciato ma lasciato senza dimostrazione.

Teorema 33. (Criterio di Integrabilità)

Siano $K = [a, b] \times [c, d]$ ed $f : K \to \mathbf{R}$ una funzione limitata.
Allora le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

(**a**) f è integrabile secondo Riemann;

(**b**) per ogni $\epsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ di K, tale che $S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) - s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq \epsilon$.

Dimostrazione del Teorema 33.

Mostreremo separatamente che (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) e che (**b**) $\Rightarrow$ (**a**).
Per cominciare mostriamo che (**a**) $\Rightarrow$ (**b**). A tale scopo osserviamo che, indicato con λ il valore dell'integrale di f, essendo tale valore l'estremo superiore di tutte le possibili somme inferiori, per ogni fissato $\epsilon > 0$ esisterà un'opportuna somma inferiore $s(f, \mathcal{P}'_1 \times \mathcal{P}'_2)$ tale che

(234) $$\lambda - \frac{\epsilon}{2} \leq s(f, \mathcal{P}'_1 \times \mathcal{P}'_2) \leq \lambda.$$

Inoltre, poiché λ è anche l'estremo inferiore di tutte le possibili somme superiori esisterà un'opportuna somma superiore $S(f, \mathcal{P}''_1 \times \mathcal{P}''_2)$ tale che

(235) $$\lambda \leq S(f, \mathcal{P}''_1 \times \mathcal{P}''_2) \leq \lambda + \frac{\epsilon}{2}.$$

Se ora prendiamo $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ più fine sia di $\mathcal{P}'_1 \times \mathcal{P}'_2$ che di $\mathcal{P}''_1 \times \mathcal{P}''_2$, ad esempio prendendo $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}'_1 \cup \mathcal{P}''_1$ e $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}'_2 \cup \mathcal{P}''_2$, avremo che

$$s(f, \mathcal{P}'_1 \times \mathcal{P}'_2) \leq s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq \lambda \leq S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}''_1 \times \mathcal{P}''_2),$$

che, combinata con (234) e (235), ci fa ottenere la disuguaglianza

$$\lambda - \frac{\epsilon}{2} \leq s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq \lambda \leq S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq \lambda + \frac{\epsilon}{2},$$

da cui segue che

$$S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) - s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq \epsilon,$$

che è appunto quanto ci serviva dimostrare, per poter affermare che vale la (**b**).
Mostrare che (**b**) $\Rightarrow$ (**a**) è ancora più semplice.
Per cominciare osserviamo che, se con λ^- e λ^+ indichiamo rispettivamente l'integrale inferiore e l'integrale superiore di f, qualsiasi sia la partizione $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ si ha

(236) $$s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq \lambda^- \leq \lambda^+ \leq S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2).$$

Se ora, grazie a (**b**), comunque fissiamo $\epsilon > 0$, possiamo scegliere $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ in modo che

(237) $$S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) - s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq \epsilon,$$

combinando, la (236) con la (237), possiamo affermare che, qualsiasi sia $\epsilon > 0$, si ha:

$$0 \leq \lambda^+ - \lambda^- \leq \epsilon,$$

la qual cosa, data l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, equivale a dire che $\lambda^+ - \lambda^- = 0$, cioè che l'integrale inferiore e l'integrale superiore di f coincidono. Ciò significa che vale (**a**).
Ciò completa la dimostrazione.

115. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.
Per quanto riguarda esercizi più concreti (cioè il calcolo degli integrali doppi), a questo punto della teoria egli non è ancora in grado di affrontarli.
Si limiti, dunque, per il momento, a svolgere i problemi che gli proponiamo nel paragrafo successivo, il cui scopo è quello di farlo familiarizzare con i concetti di partizione e di somma di Riemann.

116. Lista dei problemi

144. Siano $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_4 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ e $\mathcal{P}_5 = \mathcal{P}_6 = \left\{0, \frac{1}{99}, \frac{2}{99}, \ldots, \frac{98}{99}, 1\right\}$ dire, motivando la risposta, se $\mathcal{P}_5 \times \mathcal{P}_6$ è più fine di $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, di $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_4$, e di $\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4$.

145. Siano $\mathcal{P}_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $\mathcal{P}_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ e $\mathcal{P}_3 = \left\{0, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \ldots, \frac{14}{15}, 1\right\}$
Trovare una partizione di $[0, 1] \times [0, 1]$ che sia più fine sia di $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ che di $\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_3$.

146. Siano $\mathcal{P}_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $\mathcal{P}_2 = \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\right\}$ e sia $f(x, y) = x + y$.
Calcolare $s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$ e $S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$.

147. Siano $\mathcal{P}_1 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{7}{8}, 1\right\}$ e $\mathcal{P}_2 = \left\{0, \frac{2}{5}, 1\right\}$, e sia $f(x, y) = x - y$.
Calcolare $s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$ e $S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$.

148. Siano $\mathcal{P}_1 = \left\{-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1\right\}$ e $\mathcal{P}_2 = \left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, e sia $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Calcolare $s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$ e $S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$.

149. Siano $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, e $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_4 = \left\{0, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \ldots, \frac{10}{11}, 1\right\}$.
Trovare $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}$, integrabile secondo Riemann e tale che $s(f, \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_4) < s(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$.

117. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 121.

Dare la definizione di partizione di un parallelepipedo e dire cosa significa che una partizione è più fine di un'altra.

Domanda 122.

Esibire due partizioni di un rettangolo K, tali che nessuna delle due sia più fine dell'altra.

Domanda 123.

Mostrare che, prese comunque due partizioni di un rettangolo K, esiste sempre una partizione più fine di entrambe.

Domanda 124.

Definire le somme di Riemann inferiore e superiore di una funzione f rispetto ad una partizione $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$.

Domanda 125.

Enunciare e dimostrare il teorema che spiega come si comportano le somme di Riemann inferiori e superiori su un rettangolo quando si passa ad una partizione più fine.

Domanda 126.

Mostrare che, anche per le funzioni in due variabili, ogni somma di Riemann inferiore è minore o uguale di ogni somma di Riemann superiore.

Domanda 127.

Dare la definizione di integrale di Riemann per una funzione definita su un rettangolo.

Domanda 128.

Enunciare e dimostrare il teorema che fornisce una caratterizzazione equivalente all'integrabilità secondo Riemann per le funzioni definite su un rettangolo.

Domanda 129.

Esibire una funzione in due variabili non integrabile secondo Riemann, motivando la risposta con le opportune dimostrazioni.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **34**

A.A. 2011-2012
20 Dicembre 2011
ore 11.30-13.15

118. Contenuti della Lezione

Tutti gli argomenti trattati a lezione possono essere trovati nel paragrafo **14.2** con l'eccezione del teorema sull'integrale iterato per le funzioni definite su un rettangolo.
Nel libro di testo tale teorema viene solo enunciato nel paragrafo **14.1**, ma la sua dimostrazione viene omessa.
Per completezza riportiamo qui di seguito sia l'enunciato che la dimostrazione di tale teorema, così come è stata fatta a lezione.

Teorema 34. (dell'integrale iterato)

Siano $K = [a, b] \times [c, d]$ ed $f : K \to \mathbf{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann su K.
Supponiamo inoltre che, per ogni fissato $x \in [a, b]$, la funzione $y \to f(x, y)$ sia integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[c, d]$ e poniamo $G(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy$.
Allora la funzione $G(x)$ è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ e si ha:

$$\int_K f(x, y)\, dxdy = \int_a^b G(x)\, dx. \tag{238}$$

La (238) risulta più espressiva se si ricorda che $G(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy$, sicché la si può riscrivere nel modo seguente:

$$\int_K f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Inoltre lo stesso teorema vale (ovviamente) scambiando il ruolo delle variabili x e y. Lasciamo allo studente il semplice compito di scriverne l'enunciato anche in questo caso.

Dimostrazione del Teorema 34.

Il punto centrale della dimostrazione è far vedere che, comunque si prenda una partizione $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ di $K = [a, b] \times [c, d]$, vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$s\,(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \le s\,(G, \mathcal{P}_1) \le S\,(G, \mathcal{P}_1) \le S\,(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \tag{239}$$

Dimostrato questo, la tesi è immediata.
Infatti, comunque si fissi $\epsilon > 0$, dall'integrabilità di f su K segue che esiste sempre una partizione $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ di K tale che $S\,(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) - s\,(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \le \epsilon$.
Ma allora, dalla (239) segue che anche $S\,(G, \mathcal{P}_1) - s\,(G, \mathcal{P}_1) \le \epsilon$, dalla qual cosa, data l'arbitrarietà di ϵ, si deduce l'integrabilità di G.
Inoltre dalla (239) segue che l'integrale di G su $[a, b]$ deve necessariamente coincidere con quello di f su K, che è proprio la tesi del nostro teorema.
Perché tutto questo sia vero, quindi, basterà dimostrare che, comunque si scelga la partizione $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ di K, la catena di disuguaglianze (239) è sempre valida.
Ovviamente, poiché sappiamo già che è vera la disuguaglianza

$$s\,(G, \mathcal{P}_1) \le S\,(G, \mathcal{P}_1)\,, \tag{240}$$

ci basterà mostrare che sono vere la prima e l'ultima disuguaglianza di (239).
Mostriamo dunque che, comunque si scelga $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ partizione di K, si ha sempre

$$s\,(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \le s\,(G, \mathcal{P}_1)\,. \tag{241}$$

A tale scopo, posto $\mathcal{P}_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{P}_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, e $Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e per ogni $j = 1, \ldots, m$, ricordiamo che:

$$\begin{aligned} s\,(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^{m} (y_j - y_{j-1}) \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x, y) \right) \end{aligned}$$

e che:

$$s\,(G, \mathcal{P}_1) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x\in[x_{i-1}, x_i)} G(x).$$

Per dimostrare la (241) basterà quindi dimostrare che

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i)} G(x) \geq \sum_{j=1}^{m}(y_j - y_{j-1}) \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y). \tag{242}$$

A tal fine, se per ogni fissato $\tilde{x} \in [x_{i-1}, x_i)$ indichiamo con $f(\tilde{x},\cdot)$ la funzione della sola variabile y che si ottiene dopo aver fissato $x = \tilde{x}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} G(\tilde{x}) &= \int_c^d f(\tilde{x},y)\, dy \geq \\ &\geq s\left(f(\tilde{x},\cdot), \mathcal{P}_2\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{m}(y_j - y_{j-1}) \inf_{y\in[y_{j-1},y_j)} f(\tilde{x},y) \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^{m}(y_j - y_{j-1}) \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) \end{aligned} \tag{243}$$

Dal fatto che la (243) vale per ogni $\tilde{x} \in [x_{i-1}, x_i)$ segue che anche $\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i)} G(x)$ soddisfa la stessa disuguaglianza, quindi la (242) è vera.
A questo punto, dal fatto che vale la (242) segue che vale anche la (241).
In modo del tutto analogo a quanto fatto per la (241) si dimostra anche che, comunque si scelga $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ partizione di K, si ha sempre

$$S(G, \mathcal{P}_1) \leq S(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2). \tag{244}$$

A questo punto, da (240), (241) e (244) segue la (239), la quale, come già è stato osservato, permette di dimostrare facilmente la tesi.

119. Lavoro proposto per casa

Dopo aver testato la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica, lo studente può ora calcolare i primi integrali doppi definiti su rettangoli utilizzando la formula dell'integrale iterato.
Prima di cimentarsi con quelli dell'eserciziario che ha adottato, affronti quelli (molto semplici) che gli proponiamo nel paragrafo seguente.
Tenga presente che può sempre scegliere tra due modi diversi di iterare l'integrale, visto che, una volta che siano soddisfatte le opportune ipotesi di regolarità, valgono entrambe le seguenti formule:

$$\int_K f(x,y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx\right) dy$$

e

$$\int_K f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy\right) dx.$$

In certi casi, iterare l'integrale in un modo anziché nell'altro porta a calcoli di difficoltà molto diverse, per cui non è infrequente che un integrale che si calcola molto facilmente iterandolo in un modo, diventi invece molto difficile, se non impossibile, iterandolo nell'altro.
Per chiarirsi meglio le idee al proposito lo studente provi a svolgere il problema **155** in entrambi i modi.

120. Lista dei problemi

150. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3,\, 2 \leq y \leq 5\right\}$. Calcolare $\int_K xy\, dxdy$.

151. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\right\}$. Calcolare $\int_K xye^{xy}\, dxdy$.

152. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\right\}$. Calcolare $\int_K x^2e^{xy}\, dxdy$.

153. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\right\}$. Calcolare $\int_K (x+y)e^{xy}\, dxdy$.

154. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 15,\, 1 \leq y \leq 49\right\}$. Calcolare $\int_K \frac{3}{8\sqrt{x+y}}\, dxdy$.

155. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq e,\, 0 \leq y \leq 1\right\}$. Calcolare $\int_K \frac{\cos xy}{\sin x}\, dxdy$.

121. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 130.

Enunciare e dimostrare il teorema che permette di calcolare un integrale su un rettangolo come due integrali iterati in una sola variabile.

Domanda 131.

Dare la definizione di misurabilità secondo Peano-Jordan per un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}^2$, spiegando cosa significa che è ben posta.

Domanda 132.

Dare la definizione di plurirettangolo e dire cos'è la sua area.

Domanda 133.

Dare una caratterizzazione equivalente degli insiemi di misura nulla.

Domanda 134.

Enunciare e dimostrare il teorema che fornisce altre due caratterizzazioni equivalenti alla misurabilità secondo Peano-Jordan in $\mathbf{R}^2$.

Domanda 135.

Dare la definizione di integrabilità secondo Riemann per una funzione definita su un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ misurabile secondo Peano-Jordan, spiegando inoltre cosa significa che è ben posta.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 35

A.A. 2011-2012
9 Gennaio 2012
ore 11.30-13.15

122. Contenuti della Lezione

Tutti gli argomenti trattati a lezione possono essere trovati nei paragrafi **14.2** e **14.2.1** del libro di testo.

123. Lavoro proposto per casa

Per quanto riguarda la preparazione teorica, lo studente continui a testarla rispondendo alle domande di verifica.

Per quanto riguarda i problemi, può ora affrontare anche tutti gli integrali doppi su domini semplici, che si possono risolvere scrivendoli come integrali iterati.

Ancora una volta ricordi che, quando il dominio di integrazione è semplice rispetto ad entrambe le variabili, l'integrale si può scrivere come integrale iterato in due modi diversi, con difficolta di calcolo anche molto diverse tra loro.

Un buon esempio di questo fatto è fornito dal problema **160**.

124. Lista dei problemi

156. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| \le x \le 1\right\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K 2x^2 e^{xy}\,dxdy$.

157. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ln 4 \le \frac{1}{x} \le \ln 8,\ 4 \le x^3 y \le 9\right\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K \frac{3e^{\sqrt{xy}}}{47\sqrt{x^3 y}}\,dxdy$.

158. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{\pi}{3} \le xy \le \frac{4\pi}{3},\ e \le y \le e^2\right\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K \sin xy\,dxdy$.

159. Sia $K = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \ge 6,\ x + y^2 \le 7,\ y \ge 0\right\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K \frac{2y}{x^2}\,dxdy$.

160. Esprimere l'integrale

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{2x^2 y \cos(y^2)}{\sin(x^2)} dx \right) dy$$

come integrale doppio e calcolarlo.

161. Calcolare

$$\int_D y e^x\,dxdy$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2,\ x \ge 0,\ 0 \le y \le x^2\right\}.$$

125. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 136.

Enunciare le proprietà elementari dell'integrale di Riemann su insiemi misurabili secondo Peano-Jordan: linearità, monotonia, comportamento rispetto al valore assoluto, additività sul dominio di integrazione, teorema della media.

Domanda 137.

Enunciare due condizioni sufficienti a garantire l'integrabilità di funzioni definite su insiemi misurabili secondo Peano-Jordan

Domanda 138.

Enunciare e dimostrare il teorema che tratta della misurabilità secondo Peano-Jordan del grafico di una funzione in una variabile che sia integrabile secondo Riemann.

Domanda 139.

Dire cos'è, in $\mathbf{R}^2$ un dominio semplice rispetto ad x e/o rispetto ad y, spiegano se (ed eventualmente perché) è misurabile secondo Peano-Jordan.

Domanda 140.

Enunciare il teorema che permette di calcolare un integrale su un dominio semplice di $\mathbf{R}^2$ come due integrali iterati in una variabile.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 36

A.A. 2011-2012
10 Gennaio 2012
ore 11.30-13.15

126. Contenuti della Lezione

Tutti gli argomenti trattati a lezione possono essere trovati nei paragrafi **14.3**, **14.3.1** e **14.3.2** del libro di testo.

127. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a testare la propria preparazione teorica rispondendo alle domande di verifica.

Inoltre svolga i problemi che gli proponiamo nel paragrafo successivo.

128. Lista dei problemi

162. Sia $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y\}$. Calcolare $\int_K \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dxdy$.

163. Calcolare l'area dell'insieme:

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \ge 0,\ -x \le y \le x,\ x^2+4y^2 \le 5\}.$$

164. Calcolare

$$\int_D xy\,dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 9 \le x^2+9y^2 \le 36,\ 9 \le 9x^2+y^2 \le 36,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

165. Sia K il quadrilatero in $\mathbf{R}^2$ di vertici $(3,2)$, $(5,-2)$, $(10,-4)$ e $(6,4)$. Calcolare $\int_K \frac{y}{x^2}\,dxdy$.

166. Calcolare

$$\int_D \frac{x-y}{x^3+x^2y}\,dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x+y \le 2,\ x \le y \le 2x\}.$$

167. Calcolare

$$\int_D \frac{y-1}{x^2\sqrt{x}}dxdy,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x},\ \sqrt{x} \le 2-y \le 2\sqrt{x}\}.$$

168. Calcolare

$$\int_D \frac{y-x^2}{x^3}\,dxdy$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x^2 \le y \le 3x^2,\ x^2+\frac{1}{2} \le y \le x^2+1\right\}.$$

169. Calcolare

$$\int_D \frac{x^2-2x-y}{x^2+2-y}\,dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2-1 \le y \le x^2,\ (x-2)^2-1 \le y \le (x-2)^2\}.$$

170. Calcolare

$$\int_D \frac{(y^2-x^2)^2}{y^2}\,dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1+x^2 \le y^2 \le 3+x^2,\ 0 \le 2x \le y\}.$$

171. Calcolare

$$\int_D \frac{2}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}\,dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid e \le x^2+y^2 \le e^2,\ 1+x^2 \le y^2 \le 2+x^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

129. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 141.

Enunciare il teorema sul cambiamento di variabili per gli integrali doppi.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **37**

A.A. 2011-2012
13 Dicembre 2012
ore 15.00-16.45

130. Contenuti della Lezione

L'intera lezione è stata dedicata a svolgere esercizi sugli integrali doppi, per cui non è stato svolto alcun nuovo argomento di teoria.

131. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui a esercitarsi svolgendo i problemi che gli proponiamo nel paragrafo successivo.

132. Lista dei problemi

172. Sia $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + 25y^2 \leq 100\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K 2x + 5y + 3\, dxdy$.

173. Sia $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 12x^2 + y^2 \leq 12,\ x \geq 0,\ -2x \leq y \leq 6x\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K 4xy\, dxdy$.

174. Sia $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \geq 36,\ 36x^2 + 25y^2 \leq 900\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K x^2y^2\, dxdy$.

175. Sia $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K x^2y + xy^2\, dxdy$.

176. Sia $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -36 \leq xy \leq -9,\ y \geq x,\ x \geq -9,\ y \leq 9\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K (x+y)e^{x^2+y^2}\, dxdy$.

177. Sia $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2y^2 \leq 144,\ x^2 + y^2 \leq 25\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K (x^2-y^2)\sin(x^2+y^2)\, dxdy$.

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. **38**

A.A. 2011-2012
16 Gennaio 2012
ore 11.30-13.15

133. Contenuti della Lezione

Tutti gli argomenti trattati a lezione possono essere trovati nei paragrafi **14.4**, **14.4.1** e **14.4.2** del libro di testo.

134. Lavoro proposto per casa

Oltre a controllare la propria preparazione rispondendo alle domande di verifica, lo studente svolga gli integrali tripli che gli proponiamo nel paragrafo seguente.

135. Lista dei problemi

178. Sia K il tetraedro in $\mathbf{R}^3$ di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Calcolare $\displaystyle\int_K y\, dxdydz$.

179. Calcolare il volume di $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4,\ y \geq -1\}$.

180. Sia $K = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K x^2z + y^2z\, dxdydz$.

181. Sia $K = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$. Calcolare $\displaystyle\int_K x^2z\, dxdydz$.

182. Calcolare

$$\int_E \frac{2z}{2 + \sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \geq \sqrt[4]{x^2 + y^2}\right\}.$$

183. Calcolare

$$\int_E \frac{1}{z^2}\, dxdydz$$

dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \geq |x| + |y|,\ 2 \leq z \leq 3\}.$$

184. Calcolare

$$\int_E \frac{z + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

185. Calcolare

$$\int_E \frac{1}{1 - 2z^2}\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2,\ \frac{1}{4} \leq z \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Corso di

Analisi Matematica II

ingegneria dell'Edilizia ed Edile Architettura

docente: E. Callegari

Lezione n. 39

A.A. 2011-2012
17 Gennaio 2012
ore 11.30-13.15

136. Lista delle domande di verifica

Per verificare la propria preparazione lo studente controlli se è in grado di rispondere alle seguenti domande:

Domanda 142.

Dare la definizione di partizione di un parallelepipedo e dire cosa significa che una partizione è più fine di un'altra.

Domanda 143.

Definire le somme di Riemann inferiore e superiore di una funzione $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbf{R}$ rispetto ad una partizione $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_3$.

Domanda 144.

Dare la definizione di integrale di Riemann per una funzione definita su un parallelepipedo.

Domanda 145.

Enunciare il teorema che fornisce una caratterizzazione equivalente all'integrabilità secondo Riemann per le funzioni definite su un parallelepipedo.

Domanda 146.

Enunciare il teorema sull'integrazione per strati per le funzioni definite su un parallelepipedo.

Domanda 147.

Enunciare il teorema sull'integrazione per fili per le funzioni definite su un parallelepipedo.

Domanda 148.

Dare la definizione di misurabilità secondo Peano-Jordan per un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}^3$, spiegando cosa significa che è ben posta.

Domanda 149.

Enunciare il teorema che fornisce altre due caratterizzazioni equivalenti alla misurabilità secondo Peano-Jordan in $\mathbf{R}^3$.

Domanda 150.

Dare la definizione di integrabilità secondo Riemann per una funzione definita su un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ misurabile secondo Peano-Jordan, spiegando inoltre cosa significa che è ben posta.

Domanda 151.

Enunciare il teorema sull'integrazione per strati per le funzioni definite su un insieme misurabile secondo Peano-Jordan.

Domanda 152.

Enunciare il teorema sull'integrazione per fili per le funzioni definite su un insieme misurabile secondo Peano-Jordan.

Domanda 153.

Enunciare il teorema sul cambiamento di variabili per gli integrali tripli.

137. Contenuti della Lezione

La lezione è stata dedicata a completare la parte di teoria iniziata nella lezione precedente (in particolare la formula di cambiamento di variabili) e a svolgere esercizi sugli integrali tripli.

138. Lavoro proposto per casa

Lo studente continui ad esercitarsi svolgendo gli integrali tripli che gli proponiamo nel paragrafo seguente.

139. Lista dei problemi

186. Calcolare il volume di $\left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ y \le \sqrt{x^2 + z^2}\right\}$.

187. Calcolare

$$\int_E \frac{z}{x^2 + y^2}\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; 1 \le z^2 + x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

188. Calcolare

$$\int_E \frac{1}{x + y}\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; 1 \le x + y \le 2,\ 0 \le z \le 1,\ 0 \le y \le (1 - z)x\right\}.$$

189. Calcolare

$$\int_E \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z^2 \le 4x^2 + 4y^2 \le 4z^2,\ 1 \le z \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

190. Calcolare

$$\int_E \left(1 + \frac{y}{x}\right) dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; 0 \le z \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 1 - z \le x + y \le 2 - 2z\right\}.$$

191. Calcolare

$$\int_E \frac{x + y - 5z}{\sqrt{1 - z^2}}\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + 25z^2 \le 25,\ 16y^2 + 25z^2 \le 9,\ z \ge 0\right\}.$$

192. Calcolare

$$\int_E z^4 + xy\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; 4x^2 + 9z^2 \le 36z^4,\ 2x+3y \ge 0,\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

193. Calcolare

$$\int_E \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dxdydz,$$

dove $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \le x^2+y^2+z^2 \le ez,\ z^2 \ge x^2+y^2\right\}.$

194. Calcolare

$$\int_E \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3}y - \frac{5}{2}z + \frac{1}{4}\right) dxdydz,$$

dove $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 36x^2 + 9y^2 + 4z^2 \le 36\right\}.$

195. Calcolare

$$\int_E (x+y+z+1)\; dxdydz,$$

dove $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 4\sqrt{x^2+y^2} - 3\right\}.$

196. Calcolare il volume del solido

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 4z + 4\sqrt{x^2+y^2} - 7,\ z^2 \le x^2+y^2\right\}.$$

197. Calcolare

$$\int_E \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$$

dove $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 \le x^2+y^2 \le 4z^2,\ 1 \le z + \sqrt{x^2+y^2} \le 3\right\}.$

198. Calcolare

$$\int_E xyz\, dxdydz,$$

dove $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 9x^2 + 3y^2 + z^2 \le 9,\ 0 < x < y,\ z > 0\right\}.$

199. Calcolare

$$\int_E (xy + xz + yz)\; dxdydz,$$

dove $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 9x^2 + 3y^2 + z^2 \le 9,\ y \ge |x|,\ z > \sqrt{y^2+3x^2}\right\}.$

200. Calcolare

$$\int_E (xyz + 1)\; dxdydz,$$

dove $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (1+z)^2 \le x^2+y^2 \le (3-z)^2,\ z \ge 0\right\}.$