

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2023-24
Sesto appello del 27 febbraio 2025

1. Calcolare $\int_0^{2\pi} \frac{2 + \sin t}{2 - \cos t} dt$ usando il teorema dei residui.
2. Determinare:
(a) la trasformata di Laplace di $(t + \cos t)^2$;
(b) l'integrale $\int_0^{+\infty} (t + \cos t)^2 e^{-t} dt$;
(c) la trasformata di Fourier di $\frac{t^2 \sin t}{t^2 + 1}$ nel senso delle distribuzioni temperate.
3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y = \delta_1 - H(t - 1) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$ nel senso delle distribuzioni, dove H è la funzione di Heaviside e δ è la delta di Dirac, verificando che la funzione trovata è la soluzione.
4. (a) sia $f_h(t) = \frac{\sin(2ht)}{2 - \cos(ht)} + h(\delta(t - 3 - \sqrt{2}h) - \delta(t - 3 + h))$ (δ la delta di Dirac).
Determinare il limite nel senso delle distribuzioni di f_h per $h \rightarrow +\infty$;
(b) Sia $f(t) = t^2(H(t) - H(t - 1))$ (H la funzione di Heaviside). Calcolare $f'' - f'$ nel senso delle distribuzioni.
5. Siano $v_1(t) = 1 + \cos 2t$ e $v_2(t) = 1 - \cos 2t$. Determinare la proiezione di $x(t) = \sin t + \sin^2 t$ sul sottospazio vettoriale V di $L^2(-\pi, \pi)$, generato da v_1 e v_2 .
6. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = \frac{t}{(t^2 + 1)^2}$, e calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t^2 + 4)^2} \sin 2t dt$