

**METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2023-24**  
**Quinto appello del 5 febbraio 2025**

---

1. Calcolare  $\int_0^{2\pi} \frac{2 - \sin t}{2 - \cos t} dt$  usando il teorema dei residui.
2. Determinare:  
    (a) la trasformata di Laplace di  $t \cos 3t$ ;  
    (b) l'integrale  $\int_0^{+\infty} t e^{-2t} \cos 3t dt$ ;  
    (c) la trasformata di Fourier di  $\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$  nel senso delle distribuzioni temperate.
3. Risolvere il problema di Cauchy  $\begin{cases} y'' + y = \delta_\pi - H(t - \pi) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$  nel senso delle distribuzioni, dove  $H$  è la funzione di Heaviside e  $\delta$  è la delta di Dirac, verificandone la soluzione.
4. (a) sia  $f_h(t) = \frac{1}{2 - \cos(ht)} + h \left( \delta \left( t - 3 - \frac{\sqrt{2}}{h} \right) - \delta \left( t - 3 + \frac{1}{h} \right) \right)$  ( $\delta$  la delta di Dirac).  
Determinare il limite nel senso delle distribuzioni di  $f_h$  per  $h \rightarrow +\infty$  usando l'esercizio 1;  
    (b) Sia  $f(t) = e^t H(t)$  ( $H$  la funzione di Heaviside). Calcolare  $f' + f$  nel senso delle distribuzioni.
5. Siano  $v_1(t) = 1 + \cos t$  e  $v_2(t) = 1 - \cos t$ . Determinare la proiezione di  $x(t) = \cos^3 t$  sul sottospazio vettoriale  $V$  di  $L^2(-\pi, \pi)$ , generato da  $v_1$  e  $v_2$ .
6. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(t) = \frac{e^{it}}{(t^2 + 4)^2}$ .