

**METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2023-24**  
**Quarto appello del 24/9/2024**

---

1. Dire per quali valori del parametro  $r > 0$  esiste ed è non nullo l'integrale  $\int_{\partial B_r(1+i)} \frac{1}{z^2 + 1} dz$ , dove  $B_r(1+i)$  è il cerchio di centro  $1+i$  e raggio  $r$ .

2. (a) Determinare la trasformata di Laplace di  $f(t) = \min\{\pi, t\}$ ;

(b) sia  $f$  come al punto (a). Usando la forma complessa di  $\sin t$ , scrivere l'integrale  $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t} \sin t \, dt$  in termini di trasformate di Laplace e calcolarlo;

(c) la trasformata di Fourier di  $g(x) = \int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{1+t^2} dt$ . (scrivere  $g$  come convoluzione di due funzioni).

3. Sia  $f(t) = \min\{\pi, t\}$ . Risolvere il problema di Cauchy  $\begin{cases} y'' + y = f(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$  nel senso delle distribuzioni (usando la trasformata di Laplace).

4. (a) sia  $f_h(t) = \sin^{77}(ht)$ . Determinare il limite nel senso delle distribuzioni di  $f_h$  per  $h \rightarrow +\infty$ .

(b) Sia  $f(t) = H(t)(1 - tH(1-t))$  ( $H$  la funzione di Heaviside). Calcolare  $f'$  nel senso delle distribuzioni.

5. Siano  $v_1(t) = \sin t$  e  $v_2(t) = \sin^5 t$ . Determinare una base ortogonale del sottospazio  $V$  di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato da  $v_1$  e  $v_2$  e la proiezione di  $x(t) = \sin^3 t$  su  $V$ .  
(Può essere utile ricordare che  $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ).

6. Calcolare la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni temperate della funzione  $f(t) = \frac{t^4}{(t^2 + 4)^2}$ .

---

Per una traccia delle soluzioni, vedere quella del terzo appello, che contiene esercizi dello stesso tipo.