METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2023-24
Terzo appello del 6/9/2024

---

1. *Dire per quali valori del parametro $r > 0$ esiste ed è non nullo l'integrale* $\displaystyle\int_{\partial B_r(2i)} \frac{1}{z^2+1}dz$*, dove $B_r(2i)$ è il cerchio di centro $2i$ e raggio r.*

Possiamo scrivere

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\Big),$$

quindi l'integrale dipende solo dalla posizione delle due radici i e $-i$. Ci sono quindi tre casi:

(1) $r < 1$ nessuna delle radici è interna a $B_r(2i)$ e quindi l'integrale è nullo;

(2) $1 < r < 3$ il punto i appartiene a $B_r(2i)$ ma $-i$ no. In questo caso

$$\int_{\partial B_r(2i)} \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}\int_{\partial B_r(2i)} \frac{1}{z-i}dz = \pi$$

(residui o calcolo diretto);

(3) $r > 3$ entrambe le radici appartengono a $B_r(2i)$. In questo caso l'integrale è nullo (i residui sono uno l'opposto dell'altro).

Dunque, l'integrale esiste ed è non nullo se $1 < r < 3$.

2. *Determinare:* (a) *la trasformata di Laplace di $f(t) = \max\{\pi, t\}$;*

(b) *l'integrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\cos t\,dt$ *(come parte reale del valore di una trasformata di Laplace) con f come al punto (a);*

(c) *la trasformata di Fourier di* $\displaystyle g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x-t|}}{1+t^2}\,dt.$

(a) Possiamo scrivere, per $t > 0$,

$$f(t) = \pi H(t) + (t-\pi)H(t-\pi)$$

. Dunque

$$\mathcal{L}f(s) = \pi\mathcal{L}[1] + e^{-\pi s}\mathcal{L}[t] = \frac{\pi}{s} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2} = \frac{\pi s + e^{-\pi s}}{s^2}.$$

(b) Possiamo scrivere

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\cos t\,dt = Re\Big(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\cos t\,dt + i\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\sin t\,dt\Big)$$

$$= Re\int_0^{+\infty} f(t)e^{(-1+i)t}\,dt = Re\,\mathcal{L}[f](-1+i) = Re\Big(\frac{\pi(-1+i)+e^{-\pi(-1+i)}}{-2i}\Big) = -\frac{\pi}{2}$$

Alternativamente, si può scrivere $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$, per cui

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}e^{it}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}e^{-it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(1-i)t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(1+i)t}\,dt = \frac{1}{2}\mathcal{L}[f](1-i) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[f](1+i)$$

e procedere come sopra.

(c) Dato che $\mathcal{F}[f_1{}^*f_2] = \mathcal{F}[f_1]\mathcal{F}[f_2]$, si ha

$$\mathcal{F}[g] = \mathcal{F}[e^{-|t|}]\cdot\mathcal{F}\Big[\frac{1}{1+t^2}\Big] = \frac{2}{1+\omega^2}\cdot\pi e^{-\omega^2} = 2\pi\frac{e^{-\omega^2}}{1+\omega^2}.$$

3. *Sia $f(t)=\max\{\pi,t\}$. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''+y=f(t)\\ y(0)=0, y'(0)=0\end{cases}$ nel senso delle distribuzioni (usando la trasformata di Laplace).*

Dall'esercizio 2(a) si ha (applicando la trasformata di Laplace a entrambi i membri)

$$s^2Y+Y = \frac{\pi}{s}+e^{-\pi s}\frac{1}{s^2},$$

dove $Y=\mathcal{L}y$. Dunque

$$Y = \pi\frac{1}{s(1+s^2)} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2(1+s^2)}$$

Dato che

$$\frac{1}{s(1+s^2)} = \frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}1-\mathcal{L}\cos t,$$

e

$$\frac{1}{s^2(1+s^2)} = \frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}t-\mathcal{L}\sin t,$$

si ha, per $t>0$

$$y = \pi-\pi\cos t+(t-\pi-\sin(t-\pi))H(t-\pi) = \pi(1-\cos t)+(t-\pi+\sin t)H(t-\pi).$$

Tale funzione si può anche scrivere

$$y(t) = \begin{cases} \pi-\pi\cos t & \text{se } 0\le t\le\pi \\ t-\pi\cos t+\sin t & \text{se } t>\pi. \end{cases}$$

4. (a) *sia* $f_h(t) = \min\Big\{\max\Big\{\sin(ht), -\dfrac{1}{2}\Big\}, \dfrac{1}{2}\Big\}$. *Determinare il limite nel senso delle distribuzioni di* f_h *per* $h \to +\infty$.

(b) *Sia* $f(t) = H(t)(e^t - 2H(t))$ *(H la funzione di Heaviside). Calcolare* f' *nel senso delle distribuzioni.*

(a) Per il lemma di Riemann-Lebesgue il limite è la costante

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \min\Big\{\max\Big\{\sin t, -\frac{1}{2}\Big\}, \frac{1}{2}\Big\} dt = 0$$

dato che la funzione integranda è dispari.

(b) La funzione è derivabile a tratti e si ha

$$f(t) = 0 \text{ se } t < 0, \qquad f(t) = e^t - 2 \text{ se } t > 0,$$

con un salto in 0 si ampiezza -1. Dato che la derivata puntuale di f è

$$f'(t) = 0 \text{ se } t < 0, \qquad f'(t) = e^t \text{ se } t > 0,$$

la sua derivata nel senso delle distribuzioni è

$$f'(t) = -\delta + e^t H(t).$$

5. *Siano* $v_1(t) = \sin t$ *e* $v_2(t) = \sin^3 t$. *Determinare una base ortogonale del sottospazio* V *di* $L^2(-\pi, \pi)$ *generato da* v_1 *e* v_2 *e la proiezione di* $x(t) = \sin 2t$ *su* V.

Scrivendo $\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$ si ha che una base ortogonale di V è data da $w_1 = \sin t$ e $w_2 = \sin 3t$. Dato che x è ortogonale a questi due elementi della base la sua proiezione su V è 0.

6. *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione* $f(t) = \dfrac{t^4 + 2t^2}{(t^2+1)^2}$ *nel senso delle distribuzioni temperate.*

Scriviamo

$$f(t) = 1 - \frac{1}{(t^2+1)^2}.$$

La trasformata di $\frac{1}{(t^2+1)^2}$ è una funzione pari e per $\omega \geq 0$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{(t^2+1)^2} dt = -2\pi i \operatorname{Res}\Big(\frac{e^{-i\omega z}}{(z^2+1)^2}, -i\Big) = \pi e^{-\omega}\frac{1+\omega}{2}.$$

Dunque, la trasformata di Fourier di f nel senso delle distribuzioni temperate è

$$2\pi\delta + \pi e^{-|\omega|}\frac{1+|\omega|}{2}.$$