**METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2023-24**
**Secondo appello del 8/7/2024**

---

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

---

**1.** *Calcolare* $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{3+\cos t}\,dt$ *usando il teorema dei residui.*
**Soluzione:** scriviamo

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{3+\cos t}\,dt &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t}{3+\cos t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\{|z|=1\}} \frac{\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{3+\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}\,\frac{dz}{iz} \\ &= \frac{i}{4}\int_{\{|z|=1\}} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+6z+1)}dz.\end{aligned}$$

La funzione $h(z) := \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+6z+1)}$ ha singolarità in:

- $z_0 = 0$, che è un polo di ordine 2, con $\mathrm{Res}(h, z_0) = -6$;
- $z_\pm = -3 \pm 2\sqrt{2}$, che sono poli semplici. Osserviamo che $|z_-| > 1$ e $|z_+| < 1$. Inoltre: $\mathrm{Res}(h, z_+) = 4\sqrt{2}$.

Quindi, segue dal teorema dei residui:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{3+\cos t}\,dt &= \ldots = \frac{i}{4}\,2\pi i\,(\mathrm{Res}(h, z_0) + \mathrm{Res}(h, z_+)) \\ &= -\frac{\pi}{2}(-6+4\sqrt{2}) = \pi(3-2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

**2.** *Determinare:*
**(a)** *La trasformata di Laplace di* $(e^t + \cos t)^2$.
**(b)** *L'integrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4t}(e^t+\cos t)^2\,dt$.
**Soluzione:** **(a)** Osserviamo che

$$(e^t+\cos t)^2 = e^{2t} + 2e^t\cos t + \cos^2 t = e^{2t} + 2e^t \cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(e^t+\cos t)^2](s) &= \mathcal{L}[e^{2t}](s) + 2\mathcal{L}[e^t\cos t](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[1+\cos 2t](s) \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{2(s-1)}{1+(s-1)^2} + \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4)} \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{2(s-1)}{1+(s-1)^2} + \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.\end{aligned}$$

**(b)** Osserviamo che

$$\int_0^{+\infty} e^{-4t}(e^t+\cos t)^2\,dt \quad = \quad \mathcal{L}[(e^t+\cos t)^2](4) \;=\; \frac{1}{4-2}+\frac{2(4-1)}{1+(4-1)^2}+\frac{4^2+2}{4(4^2+4)} \;=\; \frac{53}{40}.$$

**3.** *Risolvere il seguente problema di Cauchy (usando la trasformata di Laplace):*

$$\begin{cases} y''(t)+2\,y'(t)+5\,y(t)=e^{-t}\sin t \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

**Soluzione:** denotiamo $F(s):=\mathcal{L}[y](s)$. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''(t)+2\,y'(t)+5\,y(t)](s)=\mathcal{L}[e^{-t}\sin t](s) \quad &\Longleftrightarrow \quad s^2F(s)+2sF(s)+5F(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1}\\ &\Longleftrightarrow \quad F(s)=\frac{1}{((s+1)^2+1)(s^2+2s+5)}.\end{aligned}$$

La funzione $F(s)e^{st}$ ha le seguenti singolarità:

- $\sigma_\pm=-1\pm i$ (poli semplici) con $\mathrm{Res}(F(s)e^{st},\sigma_\pm)=\pm\dfrac{e^{-t}e^{\pm it}}{6i}$.
- $\xi_\pm=-1\pm 2i$ (poli semplici) con $\mathrm{Res}(F(s)e^{st},\xi_\pm)=\mp\dfrac{e^{-t}e^{\pm i2t}}{12i}$.

  Quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)\\ &= \left[\mathrm{Res}(F(s)e^{st},\sigma_+)+\mathrm{Res}(F(s)e^{st},\sigma_-)+\mathrm{Res}(F(s)e^{st},\xi_+)+\mathrm{Res}(F(s)e^{st},\xi_-)\right]\\ &= \left(\frac{e^{-t}e^{it}}{6i}-\frac{e^{-t}e^{-it}}{6i}-\frac{e^{-t}e^{i2t}}{12i}+\frac{e^{-t}e^{-i2t}}{12i}\right)\\ &= \frac{e^{-t}}{6}\left(2\sin t-\sin(2t)\right).\end{aligned}$$

**4.** **(a)** *Sia* $f_h(x)=\max\{\cos^2(hx),1/2\}+h\left(\delta\left(x-\frac{2}{h}\right)-\delta\left(x-\frac{1}{h}\right)\right)$, *dove* $\delta$ *rappresenta la delta di Dirac. Determinare il limite nel senso delle distribuzioni di* $f_h$ *per* $h\to+\infty$.

**(b)** *Calcolare la trasformata di Fourier di* $\dfrac{x^3+1}{x^2+4}$ *nel senso delle distribuzioni temperate.*

**Soluzione:** **(a)** Sia $g(x):=\max\{\cos^2(x),1/2\}$; $g$ è una funzione periodica di periodo $\pi$ e si ha:

$$\int_0^{\pi} g(x)\,dx \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}\,dx+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\cos^2 x\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}.$$

Quindi si ha (la convergenza è intesa nel senso delle distribuzioni):

$$\max\{\cos^2(hx), 1/2\} = g(hx) \longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

Inoltre, se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ è una funzione test:

$$\begin{aligned}
\left\langle h\left(\delta\left(x-\frac{2}{h}\right) - \delta\left(x-\frac{1}{h}\right)\right)\right\rangle &= h\left(\varphi\left(\frac{2}{h}\right) - \varphi\left(\frac{1}{h}\right)\right) \\
&= h\left(\varphi(0) + \varphi'(0)\frac{2}{h} - \varphi(0) - \varphi'(0)\frac{1}{h} + o\left(\frac{1}{h}\right)\right) \\
&= \varphi'(0) + o(1) \longrightarrow \varphi'(0) = \langle -\delta'(x), \varphi\rangle \qquad \text{per } h \to \infty.
\end{aligned}$$

Quindi, per $h \to +\infty$, la successione $f_h$ converge nel senso delle distribuzioni a $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}-\delta'(x)$.

**(b)** Osseviamo che $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+4}\right](\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{x^3+1}{x^2+4}\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{x^3}{x^2+4}\right](\omega) + \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+4}\right](\omega) = i^3\frac{d^3}{d\omega^3}\left(\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}\right) + \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|} \\
&= i\pi\left(4\,\mathrm{segno}(\omega)\,e^{-2|\omega|} + 2\delta'(\omega)\right) + \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}.
\end{aligned}$$

**5. (a)** *Calcolare la serie di Fourier della funzione* $\min\{\cos x, 0\}$ *e discuterne la convergenza puntuale.*

**(b)** *Usando il punto precedente, calcolare* $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$.

**Soluzione: (a)** La funzione $g(x) = \min\{\cos x, 0\}$ è una funzione periodica di periodo $2\pi$ e pari (quindi nell'espansione in serie trigonometrica compariranno solo i termini relativi a $\cos(nx)$):

$$a_0 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x\,dx = -\frac{2}{\pi}.$$

Per $n > 1$ si ha:

$$\begin{aligned}
a_n &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi g(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x\,\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n+1)\frac{\pi}{2})}{n+1} + \frac{\sin((n-1)\frac{\pi}{2})}{n-1}\right]
\end{aligned}$$

cioè

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n > 1 \text{ è dispari} \\ \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{2}{4k^2-1} & \text{se } n = 2k \text{ con } k \geq 1. \end{cases}$$

Inoltre:

$$a_1 \;:=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Quindi la serie di Fourier di $g$ è data da:

$$-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos(2kx).$$

Questa serie converge puntualmente a $g(x)$ per ogni valore di $x$ (in quanto $g$ è regolare a tratti e continua).

**(b)** Usando il fatto che la serie converge a $g(0) = 0$ per $x = 0$, otteniamo:

$$0 = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}$$

da cui: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$

**6. (a)** *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione* $f(x) = \dfrac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}$.

**(b)** *Calcolare* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}\sin(2x)\,dx.$

**Soluzione: (a)** La funzione $f(z)e^{-i\omega z}$ ha singolarità $z_\pm = 2 \pm i$ (entrambe poli di ordine 2) con residui:

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, 2 \pm i) = \mp\frac{\omega}{4}e^{-i\omega(2\pm i)}.$$

Quindi, la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ sarà:

- Se $\omega > 0$: $\hat{f}(\omega) = -2\pi i\operatorname{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, 2-i) = -\dfrac{\pi i}{2}\omega e^{-2i\omega}e^{-\omega}.$
- Se $\omega < 0$: $\hat{f}(\omega) = 2\pi i\operatorname{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, 2+i) = -\dfrac{\pi i}{2}\omega e^{-2i\omega}e^{\omega}.$

  Quindi:

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{\pi i}{2}\omega e^{-2i\omega}e^{-|\omega|}.$$

**(b)**

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}\sin(2x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)dx \\
&= \frac{1}{2i}\left(\hat{f}(-2)-\hat{f}(2)\right) \;=\; \frac{\pi}{2}e^{-2}\left(e^{4i}+e^{-4i}\right) \\
&= \pi e^{-2}\cos 4.
\end{aligned}$$