METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2023-24
Primo appello del 18/6/2024 – Testo e traccia della soluzion

---

1. *Calcolare* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 t}{2-\cos t}\,dt$ *usando il teorema dei residui.*

Per semplificare i conti, faccio la divisione $\frac{y^3}{y-2} = y^2+2y+4+\frac{8}{y-2}$, per cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 t}{2-\cos t}\,dt = -\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t\,dt - 8\pi + 8\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos t}\,dt.$$

Per il teorema dei residui, notando che l'unico polo semplice contenuto nel cerchio unitario è $2-\sqrt{3}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos t}\,dt = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{2}{4z-z^2-1}\,dz = 2\pi\,\mathrm{Res}\Big(\frac{2}{4z-z^2-1}, 2-\sqrt{3}\Big) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Dunque, il risultato è $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 9\pi = \frac{2-9\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\pi$.

2. *Determinare:*
(a) *la trasformata di Laplace di* $t\cos^3 t$*;*
(b) *l'integrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\cos^3 t\,dt$*;*
(c) *la trasformata di Fourier di* $\dfrac{t^2-2t}{1+t^2}$ *nel senso delle distribuzioni temperate.*

(a) Usando la forma esponenziale del coseno, vediamo che $\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t$, per cui

$$\mathcal{L}[\cos^3 t] = \frac{1}{4}\mathcal{L}[\cos(3t)] + \frac{3}{4}\mathcal{L}[\cos t] = \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+9}.$$

Quindi

$$\mathcal{L}[t\cos^3 t] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos^3 t] = \frac{1}{4}\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2} + \frac{3}{4}\frac{s^2-1}{(s^2+9)^2};$$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\cos^3 t\,dt = \mathcal{L}[\cos^3 t](1) = -\frac{1}{50}$, sostituendo 1 ad s nel punto (a);

(c) Si ha $\frac{t^2-2t}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1} - \frac{2t}{t^2+1}$. Dunque, usando che $\mathcal{F}[\frac{1}{t^2+1}] = \pi e^{-|\omega|}$

$$\mathcal{F}\Big[\frac{t^2-2t}{t^2+1}\Big] = \mathcal{F}[1] - \mathcal{F}\Big[\frac{1}{t^2+1}\Big] + i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\Big[\frac{1}{t^2+1}\Big] = 2\pi\delta - \pi e^{-|\omega|} - i\pi\frac{\omega}{|\omega|}e^{-|\omega|}.$$

3. *Risolvere il problema di Cauchy* $\begin{cases} y'' + y = \delta_\pi - H(t-2\pi) \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$ *(H la funzione di Heaviside, δ la delta di Dirac) nel senso delle distribuzioni (usando la trasformata di Laplace).*

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione, tenendo conto delle condizioni iniziali e posto $Y = \mathcal{L}[y]$, si ha

$$(s^2+1)Y - 1 = e^{-\pi s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s},$$

ovvero

$$Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s} - \Big(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\Big)e^{-2\pi s},$$

da cui

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin t + \sin(t-\pi)\, H(t-\pi) + (\cos(t-2\pi)-1)H(t-2\pi) \\ &= \sin t - \sin t\, H(t-\pi) + (\cos t - 1)H(t-2\pi). \end{aligned}$$

4. (a) *Sia* $f_h(t) = \dfrac{\cos^3(ht)}{2-\cos(ht)} + h\Big(\delta(t-3-\dfrac{3}{h}) - \delta(t-3-\dfrac{1}{h})\Big)$ *(δ la delta di Dirac). Determinare il limite nel senso delle distribuzioni di* f_h *per* $h \to +\infty$ *usando l'esercizio 1;*

(b) *Sia* $f(t) = e^t H(t)$ *(H la funzione di Heaviside). Calcolare* $f' - f$ *nel senso delle distribuzioni.*

(a) La funzione $\frac{\cos^3(t)}{2-\cos(t)}$ è periodica di periodo 2π. Applicando il Lemma di Riemann–Lebesgue, la prima parte tende alla media di questa funzione, ovvero, per l'esercizio 1, a $\frac{2-9\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

Per la seconda parte, scriviamo

$$\Big\langle \frac{\cos^3(ht)}{2-\cos(ht)} + h\Big(\delta(t-3-\frac{3}{h}) - \delta(t-3-\frac{1}{h})\Big), v\Big\rangle = h\Big(v(3+\frac{3}{h}) - v(3+\frac{1}{h})\Big)$$

$$= h\Big(v(3) + v'(3)\frac{3}{h} - v(3) - v'(3)\frac{1}{h} + o(\frac{1}{h}\Big) = 2v'(3) + o(1) = -2\langle \delta_3', v\rangle + o(1),$$

quindi il suo limite è $-2\delta_3'$.

(b) Si ha $f' = \delta + e^t H(t)$, quindi $f' - f = \delta$.

5. *Siano* $v_1(t) = 1 + \cos t$ *e* $v_2(t) = \cos^3 t$. *Determinare la proiezione di* $x(t) = \cos t$ *sul sottospazio vettoriale* V *di* $L^2(-\pi, \pi)$ *generato da* v_1 *e* v_2.

Può essere utile per i conti scrivere $\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t$, per cui al posto di $v_2(t)$ possiamo prendere $\overline{v}_2(t) = \cos(3t) + 3\cos t$.

Ricordando che $\|\cos kt\|^2 = \pi$ per $k \neq 0$ e le condizioni di ortogonalità, abbiamo $\langle v_1, \overline{v}_2\rangle = 3\|\cos t\|^2 = 3\pi$ e (per il teorema di Pitagora) $\|v_1\|^2 = \|1\|^2 + \|\cos t\|^2 = 3\pi$, per cui, usando Gram-Schmidt, un vettore di V ortogonale a v_1 è

$$w_2 = \overline{v}_2 - \frac{\langle v_1, \overline{v}_2\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \cos(3t) + 3\cos t - (1 + \cos t) = \cos(3t) + 2\cos t - 1.$$

Prendendo i vettori $w_1 = v_1$ e w_2 come base ortogonale di V, si ha $\langle \cos t, w_1\rangle = \pi$,

$$\|w_2\|^2 = \|\cos(3t)\|^2 + 4\|\cos t\|^2 + \|1\|^2 = 7\pi, \qquad \langle \cos t, w_2\rangle = 2\|\cos t\|^2 = 2\pi,$$

e la proiezione cercata è

$$\frac{\langle \cos t, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle \cos t, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \frac{1}{3}(1 + \cos t) + \frac{2}{7}(\cos(3t) + 2\cos t - 1)$$

$$= \frac{1}{21} + \frac{19}{21}\cos t + \frac{2}{7}\cos(3t).$$

6. *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione* $f(t) = \dfrac{\cos t}{(t^2+4)^2}$.

Dato che $g(t) = \frac{1}{(t^2+4)^2}$ è pari, la sua trasformata è pari. Basta trattare il caso $\omega > 0$, per cui la trasformata è uguale a

$$2\pi i \operatorname{Res}(g(z)e^{-i\omega z}, -2i) = 2\pi i \frac{d}{dz}\frac{e^{-i\omega z}}{(z-2i)^2}_{|z=-2i} = 2\pi i\Big(\frac{-i\omega e^{-i\omega z}}{(z-2i)^2} - \frac{2e^{-i\omega z}}{(z-2i)^3}\Big)_{|z=-2i}$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{\omega e^{-2\omega}}{16} + \frac{e^{-2\omega}}{32}\Big)$$

Quindi $\mathcal{F}[g] = 2\pi\Big(-\frac{|\omega|e^{-2|\omega|}}{16} + \frac{e^{-2|\omega|}}{32}\Big)$, e

$$\mathcal{F}[f] = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{F}[ge^{it}] + \mathcal{F}[ge^{-it}]\Big) = \pi\Big(-\frac{|\omega-1|e^{-2|\omega-1|}}{16} + \frac{e^{-2|\omega-1|}}{32}\Big) + \pi\Big(-\frac{|\omega+1|e^{-2|\omega+1|}}{16} + \frac{e^{-2|\omega+1|}}{32}\Big).$$