Esercizi assortiti sulle serie

Andrea Braides

1. Discutere la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh(nx)}{2^n}$$

$[|x| < \log 2]$

2. Discutere la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\left(\frac{n}{2} \sin \frac{2}{n}\right)^n\right)$$

[diverge a $-\infty$]

3. Discutere la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n-2} + 1}$$

[diverge a $+\infty$]

4. Discutere la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt[n]{n}}{\log(1 + 2n)}$$

[converge per Leibniz]

5. Sapendo che $\sum_n e^{-a_n} < +\infty$ calcolare $\lim_n a_n$.

[$+\infty$]

6. Dire per quali α converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(2 + (n + 1)!)^\alpha}$$

$[\alpha > 1]$

7. Sapendo che $0 \leq a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\sum_n b_n < +\infty$, cosa di può dire su $\sum_n a_n$ e $\sum_n c_n$?
 [$\sum_n a_n$ converge; su $\sum_n c_n$ nulla. Trovare un esempio]

8. Dire per quali α converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{e^{\alpha n}}{n^2} + \frac{1}{n^{\alpha+2} \log n} \right)$$

$$[-1 < \alpha \leq 0]$$

9. Dire per quali α converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\alpha}(1 - n^{3/2})}{(n^2 + 1) \log(1 + n)}$$

$$[\alpha < -\frac{1}{2}]$$

10. Dire per quali α converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\tan(\frac{1}{n^{\alpha}})} - 1}{n^{2\alpha} |\log n|^{\alpha+1}}$$

$$[\alpha \geq \frac{1}{3}]$$

11. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}, \text{ dove } a_n = \begin{cases} 3^n & n \text{ pari} \\ 2^n & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

$$[\cosh 3 + \sinh 2 - 1]$$

12. Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2i+1}{2} \right)^n$$

$$[\text{diverge (in } \mathbb{C} \text{)}]$$

13. Dire per quali α converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\log(n+1)}{n^{\alpha} |\log n|^{\alpha+1}} - \frac{1}{n^{\alpha} |\log n|^{\alpha}} \right)$$

$$[\alpha > 0]$$

14. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\left(\frac{i-1}{2} \right)^n - \frac{1}{n} \right)$$

$$\left[\frac{1-i}{1+i} + \log 2 \right]$$

15. Dire per quali α converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arctan \left(\sqrt{n^{2\alpha} + 1} - n^\alpha \right)$$

$$[\alpha > 0]$$

16. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{n!}$$

$$[8e - 7]$$

17. Dire per quali $\alpha \geq 0$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{(\log n)^\alpha} - \frac{1}{n^{\alpha-1}(\log n)^\alpha} \right)$$

$$[\alpha > \frac{2}{3}]$$

18. Dire per che $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^\alpha + \alpha^n}{n^\beta |\log n|^{\alpha+\beta}}$$

$$[0 < \alpha \leq 1 \text{ e } \beta \geq \alpha + 1]$$

19. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(2n)!}$$

$$\left[2e + \frac{1}{e} - 3 \right]$$

20. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^{n+1}}.$$

$[\frac{1}{2}]$

21. Dire per quali α converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n)}{n^{\alpha+1}(\log n)^2}$$

$[\alpha \geq -1]$

22. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \pi^{n+1}}{n!}.$$

$[-\pi]$

23. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ne^{1/n} - n)^{2n}.$$

$[+\infty]$

24. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n.$$

25. Dire per quale α converge

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(1+n^2) - 2 \log n}{(1+n^{\alpha-1})|\log n|^{2\alpha}}.$$

26. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n! + 1}{(n+1)!}.$$

27. Trovare l'intervallo di convergenza di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n^2} + \frac{9^n}{n \log n} \right) x^n.$$

28. Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + e^{-n}}.$$

29. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 4^n}{n!}$.

30. Dire per quali α converge $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+4)!}{n!(n^\alpha + 1) |\log n|^{3-\alpha}}$.

31. Dire per quali x converge e calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1} x^{2n}$.

32. Trovare l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n 4^n + \frac{1}{n^2} 7^n \right) x^n$.

33. Dire se si può applicare il criterio di Leibniz a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n + \sin n}$, motivando la risposta.

34. Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_n)$ sia convergente. Cosa si può dire del comportamento di $\{a_n\}$?

35. Dire per quali x converge e calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} x^{2n}$.

36. Dire per quali α converge $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{(n+2)!(n^\alpha + 1) |\log n|^{3-\alpha}}$.

37. Dire per quali x converge e calcolare $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 - 1} x^{3n}$.

38. Dire per quali α il dominio di convergenza di $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)! |\log n|^\alpha} x^n$ è un intervallo aperto.

39. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

40. Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{-2}}{1+n^{-\alpha}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ motivando la risposta.

41. Calcolare dominio e somma della serie di potenze $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} x^{2n+1}$

42. Dire per quali $x > 0$ converge la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x + x^{-n}}$ motivando la risposta.

43. Calcolare dominio e somma della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n}$

44. Dire per quali x converge e calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} x^n$.

45. Dire per quali $\alpha > 0$ il dominio di convergenza di $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha |\log n|^{2-\alpha}} x^{2n}$ è un intervallo aperto.