

Convergenza di funzioni

Andrea Braides

1. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \frac{nx + 2}{n + x^2}.$$

2. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x)$$

al variare di $\alpha \geq 0$.

3. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = n^\alpha \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

al variare di $\alpha \geq 0$.

4. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \arctan(x^{2n}).$$

5. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = (\sin x)^n.$$

6. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha \frac{\log x + \log n}{nx + 1}$$

converge uniformemente a 0 su $(0, 1)$.

7. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \sin(\pi x^n).$$

8. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = x^{4n} - x^{2n}.$$

9. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \left(\frac{nx^2}{1+n|x|} \right)^n.$$

10. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|} (\cos \pi x)^n.$$

11. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \frac{n(\log x)^{2n}}{x}.$$

12. Discutere la convergenza di

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-\frac{n}{x}} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

13. Discutere la convergenza di

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

14. Calcolare l'insieme di convergenza puntuale D di $f_n(x) = \left(\frac{nx^2+4}{nx^2+1} \right)^n$ e il limite $f(x)$. Dire se la convergenza è uniforme su tutto D .

15. Dire se la successione $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{2x^2+n^2}$ converge uniformemente a 0 su tutto \mathbb{R} .

16. Discutere la convergenza di

$$f_n(x) = \frac{x}{|x| + \frac{1}{n}}.$$

17. Calcolare l'insieme di convergenza puntuale di $f_n(x) = \left(\frac{n^2+3nx^2}{nx^2+4} \right) \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ e il limite $f(x)$. Dire se la convergenza è uniforme.

18. Calcolare il limite puntuale di $f_n(x) = \left(\frac{n^2|x|+2n+1}{n^2|x|+n} \right)^{nx}$, e dire se la convergenza è uniforme.

19. Calcolare il limite puntuale della successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n^\alpha}{x} e^{-\frac{1}{n^2x^2}}$ definite per $x > 0$ al variare di α .

20. Dire se la successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt{\frac{nx}{n^2x^2 + 4}}$ converge uniformemente a 0 su $[1, +\infty)$.

21. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione di funzioni $f_n(x) = n^\alpha \sqrt{\frac{x}{n^2x^2 + 2}}$ converge uniformemente in $(0, +\infty)$.

22. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione di funzioni $f_n(x) = n^\alpha x(\log x + \log n)$ converge uniformemente in $(0, +\infty)$.