Convergenza di serie di funzioni

Andrea Braides

1. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza totale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^{\alpha}x^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza totale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n} x^n}{1+n^{\alpha}}.$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza totale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^{\alpha}} \left(\frac{4}{\pi} \arctan x\right)^n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)^n.$$

6. Sia f_n definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+|x|^{\alpha}} & \text{se } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ e dire se si ha convergenza uniforme e convergenza totale.

7. Sia f_n definita da

$$f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx^2}}{n}.$$

Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e dire se si ha convergenza uniforme e convergenza totale.

8. Dire per quali $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)$$

converge totalmente su $[0, 1]$.