

Esercizi su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

Andrea Braides

Disegnare i seguenti insiemi C , dire se sono chiusi, aperti, limitati; descrivere la frontiera ∂C e le eventuali simmetrie rispetto agli assi e all'origine.

1. $C = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq \sqrt{|x|}\}$.
2. $C = \{(x, y) : |y| \leq 2 - x^2\}$.
3. C l'intersezione del cerchio aperto di centro 0 e raggio 1 e l'insieme

$$\{(x, y) : (y - x\sqrt{3})(y\sqrt{3} - x) < 0\}.$$

4. C l'intersezione del cerchio chiuso di centro 0 e raggio 1 e l'insieme

$$\{(x, y) : xy - y^2 < 0\}.$$

5. $C = \{(x, y) : (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2) < 0\}$.
6. $C = \{(x, y) : y^2 \leq |x| \leq 2 + 2|y|\}$.
7. $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + 2x + y^2 \geq 0\}$.
8. $C = \{(x, y) : (x^2 + 4y^2 - 4)(x^2 - y^2 - 1) \leq 0\}$.
9. $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, \frac{1}{\sqrt{3}}|x| \leq |y| \leq \sqrt{3}|x|\}$.
10. $C = \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} = 2\}$.
11. $C = \{(x, y) : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$
12. $C = \{(x, y) : (|x| + 1)^2 + (|y| + 1)^2 \leq 5\}$.
13. $C = \{(x, y) : |x| - y^2 \leq 1\}$.

Disegnare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti insiemi.

14. $\{(x, y) : (y - 2 + \alpha x)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$
15. $\{(x, y) : (x^2 - \alpha y^2)(x^2 - y + \alpha) = 0\}$
16. $\{(x, y) : ((x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 - \alpha^4)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$
17. $\{(x, y) : (\alpha - x - y)(x^2 + y^2 - \alpha^2) = 0\}$
18. $\{(x, y) : (\alpha - x - y)(x^2 + y^2 - \alpha) = 0\}$

Disegnare il dominio delle seguenti funzioni.

19. $f(x, y) = \log(3x - 2y) - \log(3x - 1)$.

20. $f(x, y) = x \log(y + yx)$.

21. $f(x, y) = (x - 1) \log(x^2 + yx)$.

22. $f(x, y) = \sqrt{(x - y^2)(x + y)}$.

23. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

24. $f(x, y) = \sqrt{-(x - y)^2}$.

25. $f(x, y) = \arcsin(x/2) + \sqrt{xy}$.

26. $f(x, y) = \log(4 - y^2) + \sqrt{x^2 - 4}$.

27. Disegnare, i seguenti insiemi al variare di α :

$$\begin{aligned} &\{(x, y) : (x^2 + y^2 - \alpha)(4x^2 + y^2 - 1) = 0\} \\ &\{(x, y) : ((x - 1)^2 + y^2 - \alpha^2)(x^2 + (y - 1)^2 - \alpha^2) = 0\} \\ &\{(x, y) : (x^2 - y^2)((x - \alpha)^2 + y^2 - 1) = 0\} \\ &\{(x, y) : (xy - 1)(x^2 + y^2 - \alpha) = 0\} \\ &\{(x, y) : (xy - \alpha)(x^2 + y^2 - 1) = 0\} \end{aligned}$$

28. Studiare il segno di $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - x^2$

Descrivere, e possibilmente disegnare, i seguenti insiemi.

29. $\{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

30. $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq g(z)\}$ dove $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. In particolare, $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2z\}$ e $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

31. Sia D un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Disegnare $\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in D\}$; in particolare $\{(x, y, z) : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1\}$.