Integrali multipli - Esercizi svolti

Integrali di superficie

1. Si calcoli l'integrale di superficie
$$\int_\Sigma \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}\sigma,$$
dove Σ è la parte di superficie di equazione $z = x^2 - y^2$ che si proietta in
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

---

2. Si calcoli l'integrale
$$\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{1+4z}}\,\mathrm{d}\sigma,$$
dove Σ è la superficie di equazioni parametriche
$$\Sigma : \begin{cases} x &= u \\ y &= v \\ z &= u^2+v^2 \end{cases}$$
con $(u, v) \in K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 - v \leq 0,\ v \geq \frac{1}{2} \text{ oppure } u \geq 0\}$.

---

3. Si consideri il solido di $\mathbb{R}^3$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + z^2 \leq 9,\ x^2 + z^2 - 9 \leq y \leq 0\}.$$
   (a) Calcolare il volume di S;

   (b) calcolare l'area della superficie totale di S.

---

4. Sia
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 9 + xy\}.$$
Calcolare l'area della superficie frontiera di E.

---

5. Calcolare l'area della superficie ottenuta con una rotazione completa della curva
$$\gamma : \begin{cases} x &= \sqrt{2}\sin t\cos t \\ y &= 4\sin t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$
attorno all'asse y.

Integrali di linea e di flusso - Teoremi di Green, Gauss, Stokes

6. Calcolare l'integrale di linea del campo $\vec{\mathrm{F}} = (y - z, z + x, x + y)$ lungo $\gamma(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

---

7. Dato il campo $\vec{\mathrm{F}} = (y, -x)$ e la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e γ_2 è l'arco di circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ situato nel primo quadrante, si calcoli il lavoro di $\vec{\mathrm{F}}$ lungo γ percorsa in verso antiorario.

Si utilizzi il risultato ottenuto per calcolare l'area della regione C delimitata da γ.

---

8. Utilizzando il teorema di Green, calcolare l'area della regione $T \subset \mathbb{R}^2$ delimitata dal sostegno della curva chiusa $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e γ_2 è l'arco di ellisse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ contenuto nel primo quadrante e γ_3 è semicirconferenza di centro $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$ contenuta nel primo quadrante.

---

9. Dato il campo vettoriale

$$\vec{\mathrm{F}} = \left(\frac{(1-x)(1+y^2)}{1+x^2}, y\right),$$

si calcoli la circuitazione di $\vec{\mathrm{F}}$ lungo il bordo del triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$ $(1,0)$ percorso in verso antiorario.

---

10. Determinare il flusso del campo $\vec{\mathrm{F}} = (0, z, y)$ attraverso la calotta

$$\sigma : \begin{cases} x &= 2u^2v^2 \\ y &= u \\ z &= v \end{cases} \qquad 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 1.$$

---

11. Dato il campo $\vec{\mathrm{F}} = (-z, x, y)$, si calcoli il lavoro di $\vec{\mathrm{F}}$ lungo la curva γ intersezione del piano $z = y$ con il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$, precorsa in modo che la sua proiezione γ_1 sul piano (x, y) risulti percorsa in verso antiorario.

---

12. Dato il campo vettoriale $\vec{\mathrm{F}} = (z, x, y)$, si calcoli il flusso di $\mathrm{rot}(\vec{\mathrm{F}})$ attraverso la porzione di superficie S, di equazione $z = xy$ che si proietta nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (con $\vec{\mathbf{n}}$, versore normale, orientato verso l'alto) si direttamente, sia applicando il teorema di Stokes.

---

13. Si calcoli il flusso del campo $\vec{\mathrm{F}} = (z, x^2 y, y^2 z)$ uscente dalla superficie del solido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}.$$

---

14. Calcolare il flusso del campo $\vec{\mathrm{F}} = (1, z, -y^3)$ attraverso la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3y^2 + z^2,\ 1 \leq x \leq 3\}$$

orientata in modo che la normale formi un angolo ottuso con il semiasse x positivo.

SOLUZIONI

Integrali di superficie

1. Parametrizziamo la superficie Σ nel modo seguente

$$\Sigma \begin{cases} x &= u \\ y &= v \\ z &= u^2 - v^2 \end{cases}$$

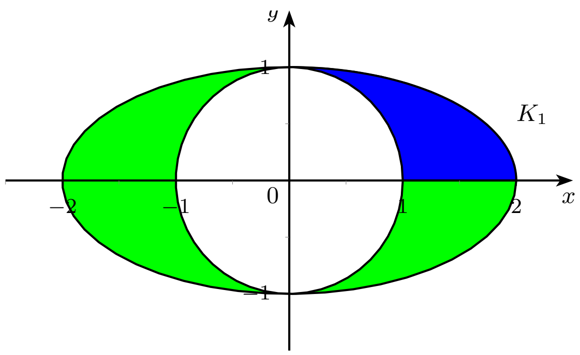
con $(u,v) \in K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \geq 1,\ u^2+4v^2 \leq 4\}$. Il vettore normale $\vec{\mathbf{N}}$ è dato da

$$\vec{\mathbf{N}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (-2u, 2v, 1)$$

e dunque

$$I = \int_K f(u,v,u^2-v^2)\|\vec{\mathbf{N}}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_K u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 4\int_{K_1} u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

dove $K_1 = K \cap \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$.



Se indichiamo inoltre con

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+4v^2 \leq 4,\ u \geq 0,\ v \geq 0\} \\ E_2 &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \leq 1,\ u \geq 0,\ v \geq 0\} \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$I = 4\int_{E_1} u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - 4\int_{E_2} u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Passando a coordinate polari ellittiche

$$\begin{cases} u &= 2\rho\cos\theta \\ v &= \rho\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

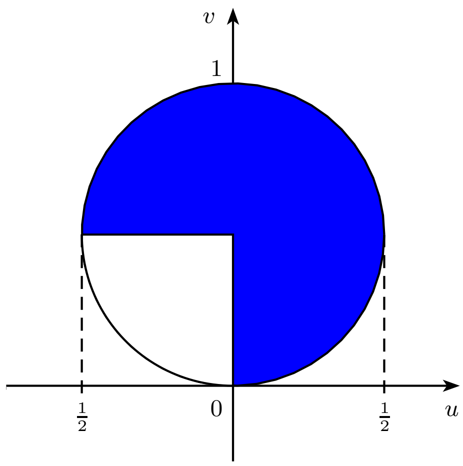
otteniamo che $\displaystyle\int_{E_1} u^2 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}$.

Analogamente, utilizzando le coordinate polari otteniamo che $\displaystyle\int_{E_2} u^2 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{16}$. Concludiamo che

$$I = 4 \cdot \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{7\pi}{4}.$$

---

2. Il dominio K è rappresentato nella figura seguente:



Dalla parametrizzazione

$$\Sigma : \begin{cases} x &= u \\ y &= v \\ z &= u^2 + v^2 \end{cases} \qquad\qquad (u, v) \in K$$

ricaviamo il vettore normale

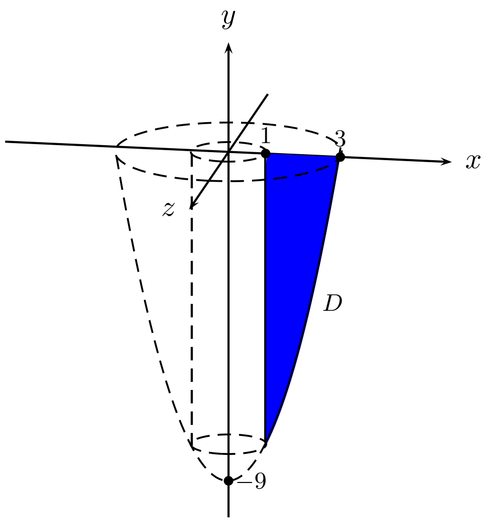
$$\vec{\mathbf{N}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1).$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_K \frac{u}{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}} \sqrt{1+4u^2+4v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_K u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}v \int_{-} \sqrt{v-v^2}^{\sqrt{v-v^2}} u\,\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}v \int_0^{\sqrt{v-v^2}} u\,\mathrm{d}u = \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (v - v^2)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

---

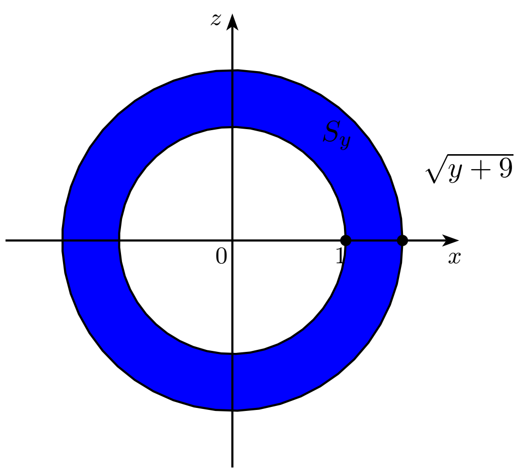
3. Il solido S si ottiene mediante una rotazione completa di D attorno all'asse y.



(a) Per calcolare il volume V integriamo per strati paralleli al piano xz:

$$V = \int_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-8}^{0} \left(\int_{S_y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y = \int_{-8}^{0} (\mathrm{Area}(S_y)\,\mathrm{d}y,$$

dove S_y è la corona circolare di raggi 1 e $\sqrt{y+9}$



Quindi l'area di S_y è data da $\pi(y+9-1) = \pi(y+8)$ e sostituendo nella formula precedente

$$V = \pi \int_{-8}^{0} (y+8)\,\mathrm{d}y = 32\pi.$$

(b) L'area della superficie totale è la somma dell'area A_1 della base inferiore più l'area A_2 della superficie interna del cilindro più l'area A_3 della superficie laterale della porzione di paraboloide $y = x^2 + z^2 - 9$.

La base superiore è una corona circolare di raggi 1 e 3 e dunque $A_1 = 9\pi - \pi = 8\pi$.

Il cilindro interno ha raggio 1 e lunghezza 8, e quindi $A_2 = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$.
Per quanto riguarda il paraboloide, se poniamo $f(x,z) = x^2 + z^2 - 9$, abbiamo

$$A_3 = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

dove $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + z^2 \leq 9\}$. Passando a coordinate polari si ottiene

$$A_3 = \frac{\pi}{6} \cdot (37^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}),$$

e quindi l'area superficie totale di S risulta essere

$$24\pi + \frac{\pi}{6} \cdot (37^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}).$$

Equivalentemente, la superficie del paraboloide si può ottenere dalla rotazione della curva

$$\gamma : \begin{cases} x &= t \\ y &= t^2 - 9 \end{cases} \qquad 1 \leq t \leq 3,$$

attorno all'asse y e dunque, applicando il teorema di Guldino

$$A_3 = l_\gamma \cdot 2\pi \cdot x_B = l_\gamma \cdot 2\pi \frac{\int_\gamma x}{l_\gamma} = 2\pi \int_\gamma x = 2\pi \int_1^3 t\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6} \cdot (37^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}).$$

4.
- Il cerchio di base ha area π.
- La superficie laterale del cilindro ha equazione parametrica

$$S : \begin{cases} x &= \cos u \\ y &= \sin u \\ z &= v \end{cases} \qquad (u,v) \in K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 9 + \cos u \sin u\}$$

da cui otteniamo

$$\vec{\mathbf{N}}(u,v) = (\cos u, \sin u, 0)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(S) &= \int_K \|\vec{\mathbf{N}}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_K \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{9+\cos u \sin u} \mathrm{d}v = 18\pi. \end{aligned}$$

- La calotta superiore di E ha equazione cartesiana $z = f(x,y) = 9 + xy$ e la sua proiezione sul piano xy è l'insieme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Quindi la sua area è data da

$$\begin{aligned} \mathrm{Area} &= \int_C \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{2\pi}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$

L'area totale della superficie è

$$19\pi + \frac{2\pi}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

---

5. Applicando il teorema di Guldino

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= l_\gamma \cdot 2\pi x_B = l_\gamma \cdot 2\pi \tfrac{1}{l_\gamma} \int_\gamma x = 2\pi \int_\gamma x = \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \sin t \cos t \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \\
&= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t (1 + 2\cos^2 t) \, \mathrm{d}t = 4\pi.
\end{aligned}$$

Integrali di linea e di flusso - Teoremi di Green, Gauss, Stokes

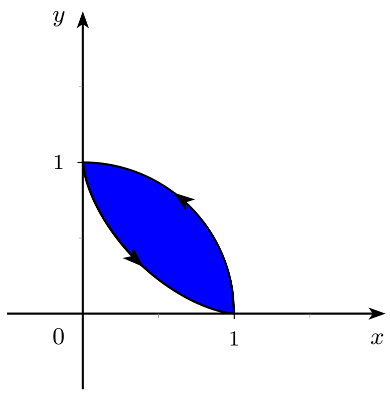
6. Dalla definizione si ha

$$\int_\gamma \vec{\mathrm{F}}(P)\,\mathrm{d}P =$$
$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\sin t - \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin t + 2\cos t, 2\cos t + \sqrt{2}\sin t) \cdot (-2\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} (4\sqrt{2}\cos^2 t + 4\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{2}\pi.$$

---

7. Per la proprietà di additività degli integrali di linea abbiamo

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} \vec{\mathrm{F}}(P)\,\mathrm{d}P = \int_{\gamma_1} \vec{\mathrm{F}}(P)\,\mathrm{d}P + \int_{\gamma_2} \vec{\mathrm{F}}(P)\,\mathrm{d}P.$$



Quindi

$$\int_\gamma \vec{\mathrm{F}}(P)\,\mathrm{d}P =$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t, -\cos^3 t) \cdot (-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t, -\cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3\cos^2 t\sin^4 t - 3\sin^2 t\cos^4 t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}t = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2} =$$
$$= \tfrac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2} = -\frac{5}{16}\pi.$$

Applicando il teorema di Green:

$$-\frac{5}{16}\pi = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} \vec{\mathrm{F}}(P)\,\mathrm{d}P = \int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C (-1-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\mathrm{Area}(C)$$

e dunque $\mathrm{Area}(C) = \frac{5}{32}\pi$.

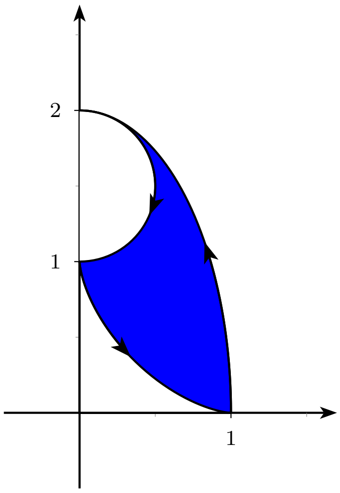
---

8. Parametrizziamo le tre curve nel modo seguente:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t \\ y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos t \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$



Posto $\vec{\mathrm{F}} = (0, x)$, dal teorema di Green risulta:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Area}(T) = \int_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\gamma \vec{\mathrm{F}}(P)\,\mathrm{d}P = \\
&= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} \vec{\mathrm{F}}(P)\,\mathrm{d}P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, \cos^3 t) \cdot (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)\,\mathrm{d}t + \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, \cos t) \cdot (-\sin t, 2\cos t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(0, \frac{1}{2}\cos t\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t\right)\,\mathrm{d}t = \\
&= -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)\cos^4 t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{9}{32}\pi.
\end{aligned}$$

---

9. Applicando il teorema di Green:

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \vec{\mathrm{F}}(P)\,\mathrm{d}P = \int_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_T \frac{2y(x-1)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{-2x+2} \frac{2y(x-1)}{1+x^2}\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \frac{(x-1)}{1+x^2} \cdot \frac{(2-2x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \\
&= -4\int_0^1 \frac{1-x)^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 (x-3)\,\mathrm{d}x + 4\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + 8\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \\
&= 4\log 2 + 2\pi - 10.
\end{aligned}$$

---

10. Il flusso di $\vec{\mathrm{F}}$ attraverso σ è dato da

$$\int_\sigma \vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}} = \int_K \vec{\mathrm{F}}(\sigma(u,v))\cdot\vec{\mathbf{N}}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \qquad \text{dove } K=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le u\le 2,\ 0\le v\le 1\}$$

e

$$\vec{\mathbf{N}} = \frac{\partial\sigma}{\partial u}\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4uv^2 & 1 & 0 \\ 4u^2v & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-4uv^2,-4u^2v).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\sigma \vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}} &= \int_K (0,u,v)\cdot(1,-4uv^2,-4u^2v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= \int_K (-4uv^2-4u^2v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -4\int_0^2 \mathrm{d}u\int_0^1 (uv^3+u^3v)\,\mathrm{d}v = \\ &= -10. \end{aligned}$$

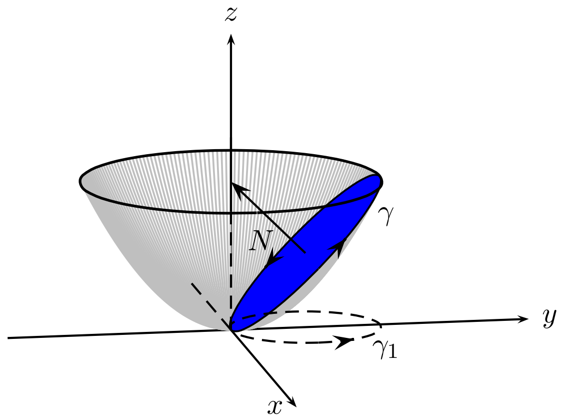
---

11. <u>Calcolo diretto</u>: la curva γ ha equazione cartesiana:

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = y \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2+y^2-y=0 \\ z=y \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2+\left(y-\frac12\right)^2=\frac14 \\ z=y \end{cases}$$

da cui si ricavano le equazioni parametriche

$$\gamma : \begin{cases} x &= \frac12\cos t \\ y &= \frac12+\frac12\sin t \\ z &= \frac12+\frac12\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi].$$



Quindi

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{\mathrm{F}}(P)\cdot\mathrm{d}P &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac12-\frac12\sin t,\frac12\cos t,\frac12+\frac12\sin t\right)\cdot\left(-\frac12\sin t,\frac12\cos t,\frac12\cos t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac14\sin t+\frac14\sin^2 t\frac14\cos^2 t+\frac14\cos t+\frac14\sin t\cos t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Applicando il Teorema di Stokes: la curva γ racchiude la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y,\ x^2 + y^2 \leq z\}$$

che si proietta nel piano $z = 0$ sul cerchio $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y \leq 0\}$. Il vettore normale a Σ è $\vec{\mathbf{N}} = (0, -1, 1)$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{\mathrm{F}}(P) \cdot \mathrm{d}P &= \int_\Sigma \mathrm{rot}(\vec{\mathrm{F}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \int_C (1, -1, 1) \cdot (0, -1, 1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \\ &= \int_C 2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2\mathrm{Area}(C) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

---

12. Calcolo diretto: dalle equazioni parametriche di S:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv \end{cases} \qquad (u, v) \in K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$$

ricaviamo

$$\vec{\mathbf{N}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = (-v, -u, 1).$$

Poiché $\vec{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{k} = 1$, l'orientazione è corretta. Inoltre $\mathrm{rot}(\vec{\mathrm{F}}) = (1, -1, 1)$, da cui

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{rot}(\vec{\mathrm{F}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} &= \int_K (1, -1, 1) \cdot (-v, -u, 1)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 (1 - \rho \sin\theta + \rho \cos\theta)\rho\, \mathrm{d}\rho = \pi.\end{aligned}$$

Col Teorema di Stokes: parametrizziamo il bordo di S nel modo seguente:

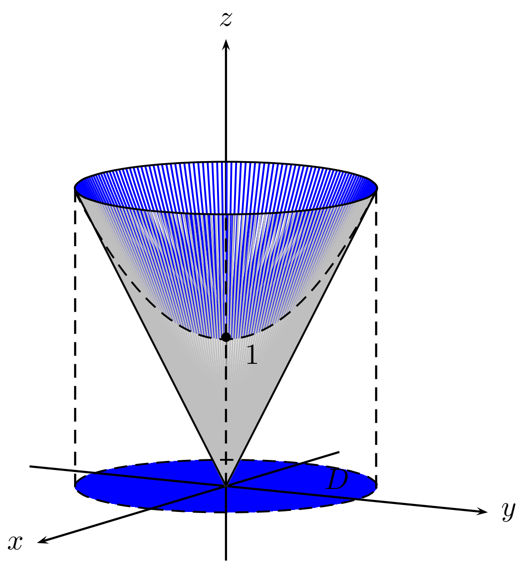
$$\partial S : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Quindi

$$\int_S \mathrm{rot}(\vec{\mathrm{F}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \int_{\partial S} \vec{\mathrm{F}}(P) \cdot \mathrm{d}P = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2t, \cos t, \sin t\right) \cdot (-\sin t, \cos t, \cos 2t)\, \mathrm{d}t = \pi.$$

---

13. La proiezione di S sul piano (x, y) è $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.



Applicando il teorema di Gauss:

$$\begin{aligned}\Phi_{\partial S}(\vec{\mathrm{F}}) &= \int_{\partial S} \vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \int_S \mathrm{div}(\vec{\mathrm{F}})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_S (x^2+y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \\ &= \int_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{1+x^2+y^2} (x^2+y^2)\, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^2(1+\rho^2-2\rho)\rho\, \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{30}.\end{aligned}$$

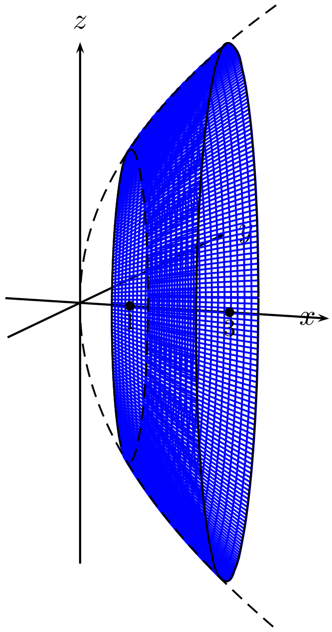
---

14. Dalle equazioni parametriche di S

$$S : \begin{cases} x = 3u^2+v^2 \\ y = u \\ z = v \end{cases} \qquad (u,v) \in K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le 3u^2+v^2 \le 3\}$$

ricaviamo

$$\vec{\mathbf{N}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6u & 1 & 0 \\ 2v & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -6u, -2v).$$



Poiché $\vec{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{i} = 1 > 0$, il vettore $\vec{\mathbf{N}}$ forma un angolo acuto con il semiasse positivo delle x. Come vettore normale ad S bisogna considerare $(-1, 6u, 2v)$. Quindi

$$\Phi_S(\vec{\mathrm{F}}) = \int_K (1, v, -u^3) \cdot (-1, 6u, 2v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

e passando a coordinate polari ellittiche

$$\int_K (1, v, -u^3) \cdot (-1, 6u, 2v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$