Convergenza di funzioni

Andrea Braides

1. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \frac{nx+2}{n+x^2}.$$

2. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$$

al variare di $\alpha \geq 0$.

3. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = n^\alpha \arctan\Big(\frac{x}{n}\Big)$$

al variare di $\alpha \geq 0$.

4. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \arctan(x^{2n}).$$

5. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = (\sin x)^n.$$

6. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \arctan\Big(\frac{x}{n}\Big)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \sin(\pi x^n).$$

8. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di

$$f_n(x) = x^{4n} - x^{2n}.$$

9. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di
$$f_n(x) = \Big(\frac{nx^2}{1+n|x|}\Big)^n.$$

10. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}(\cos \pi x)^n.$$

11. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza uniforme di
$$f_n(x) = \frac{n(\log x)^{2n}}{x}.$$

12. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza totale di
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^{\alpha}x^2}$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

13. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza totale di
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n}x^n}{1+n^{\alpha}}.$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

14. Discutere la convergenza puntuale e dire in che intervalli si ha convergenza totale di
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^{\alpha}}\Big(\frac{4}{\pi}\arctan x\Big)^n$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

15. Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\Big)^n.$$

16. Sia f_n definita da
$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+|x|^{\alpha}} & \text{se } n \le x < n+1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ e dire se si ha convergenza uniforme e convergenza totale.

17. Sia f_n definita da

$$f_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{e^{-nx^2}}{n}.$$

Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e dire se si ha convergenza uniforme e convergenza totale.

18. Dire per quali $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)$$

converge totalmente su $[0, 1]$.

19. Discutere la convergenza di

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-\frac{n}{x}} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

20. Discutere la convergenza di

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

21. Calcolare l'insieme di convergenza puntuale D di $f_n(x) = \left(\frac{nx^2+4}{nx^2+1}\right)^n$ e il limite $f(x)$. Dire se la convergenza è uniforme su tutto D.

22. Dire se la successione $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{2x^2+n^2}$ converge uniformemente a 0 su tutto $\mathbb{R}$.

23. Discutere la convergenza di

$$f_n(x) = \frac{x}{|x| + \frac{1}{n}}.$$