Alcuni esercizi risolti da esami di anni passati

Andrea Braides

1. *Calcolare, se esiste, il limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}\,\log\Big(\frac{x^2+y^2+x^3y}{x^2+y^2}\Big)$.

Dato che $\log(1+s) = s + o(s)$ per $s \to 0$, abbiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}\log\Big(\frac{x^2+y^2+x^3y}{x^2+y^2}\Big) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}\log\Big(1+\frac{x^3y}{x^2+y^2}\Big)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Il limite è un quoziente di polinomi omogenei dello stesso grado, quindi non esiste. Basta vedelo per le rette $x = 0$ su cui è 0 e $x = y$ su cui è

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(x^2+x^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

2. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = x^{(y^2)} - \log\Big(\frac{x+1}{y+1}\Big)$ *nel punto* $x = y = 1$.

Basta usare la formula

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

con $x_0 = y_0 = 1$.

Si ha (se pi comodo scrivendo $f(x,y) = e^{y^2\log x} - \log(x+1) + \log(y+1)$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^{(y^2)}\frac{y^2}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{(y^2)} 2y \log x + \frac{1}{y+1},$$

per cui:

$$f(1,1) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}$$

e il piano tangente è

$$z = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(x+y).$$

3. *Sia* $\gamma : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$.

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right)$.

Basta applicare la definizione di integrale di seconda specie, con

$$dx = e^t(\sin t + \cos t)\, dt, \qquad dy = e^t(\cos t - \sin t)\, dt.$$

L'integrale diventa, dopo le semplificazioni algebriche

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

4. *Dire se l'equazione* $\sin(xe^y) + \log(\cos(x+y)) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $\varphi = \varphi(y)$ *in un intorno di* $(0,0)$*, e, se tale* φ *esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine* 1*.*

Sia $f(x,y) = \sin(xe^y) + \log(\cos(x+y))$. Una condizione sufficiente affinché $f(x,y) = 0 (= f(0,0))$ definisca implicitamente una funzione della y è che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$, che è verificata perché

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xe^y)e^y - \tan(x+y)$$

che vale 1 in $(0,0)$. Lo sviluppo di Taylor di φ è dato da

$$x = x_0 + \varphi'(0)(x - x_0) = \varphi'(0)x.$$

Dato che

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xe^y)xe^y - \tan(x+y)$$

si ha

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = 0$$

e lo sviluppo cercato è $x = 0$.

5. *Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = ye^x$ sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1.*

Possiamo usare i moltiplicatori di Lagrange con $g(x, y) = x^2+y^2-1$. Si ha quindi il sistema

$$\begin{cases} ye^x = \lambda 2x \\ e^x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dato che $x = y = 0$ non è soluzione possiamo eliminare λ e ottenere

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 + x - 1 = 0, \end{cases}$$

che dà le soluzioni

$$\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \end{cases}$$

e quindi

$$\min f = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\, e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \qquad \max = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\, e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

(Si potrebbe notare che per il teorema di Weierstrass ci devono essere massimo e minimo, e dato che sia f che g sono regolari questi si possono trovare con i moltiplicatori di Lagrange. Dato che si trovano solo due punti non c'è alcuna discussione ulteriore da fare).

6. Sia $D = \{(x, y) : y^2 \le |x| \le 2 + 2|y|\}$. Disegnare D e calcolare

$$\iint_D (|x| + x^2 \sin y)\, dx\, dy.$$

(Suggerimento: disegnare prima D nel quadrante $x \ge 0$, $y \ge 0$. Usare le simmetrie di D e dell'integrando)

Il primo suggerimento consiste nel fatto che D è simmetrico sia rispetto a x che y. Dunque basta disegnarlo nel primo quadrante, dove si riduce alla condizione

$$y^2 \le x \le 2 + 2y$$

che è soddisfatta per $0 \le y \le 1+\sqrt{3}$ (o $0 \le x \le 4+2\sqrt{3}$).

Il secondo suggerimento ci dice che, dato che la funzione $\sin y$ è dispari, l'integrando è antisimmetrico rispetto all'asse x e quindi il suo integrale è nullo. Dato che $|x|$ è simmetrica sia rispetto all'asse x che quello delle y, l'integrale diventa D^+ sia l'intersezione di D con il primo quadrante)

$$4\iint_{D^+}(|x|+x^2\sin y)dx\,dy = \int_0^{1+\sqrt{3}}\Big(\int_{y^2}^{2+2y} x\,dx\Big)dy\,.$$

Questo integrale si calcola facilmente. Non includo i conti.

7. *Calcolare dominio di convergenza e la somma della serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n-1}}{9^n}$

Per quanto riguarda il raggio di convergenza, trascurando il termine polinomiale n, è lo stesso di $\sum_n \frac{x^{2n}}{9^n}$ che è una serie geometriva di ragione $x^2/9$ che converge per $x^2/9<1$, ovvero per

$$-3<x<3.$$

Inserendo $x=\pm 3$ nella serie si ha

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3},$$

che diverge.

Per calcolare la somma, scriviamo (invertendo sommatoria e derivazione)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n-1}}{9^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^{2n}}{9^n} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^2}{9}\Big)^n = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{9}{9-x^2} = \frac{9x}{(9-x^2)^2}.$$

8. *Calcolare la retta tangente all'insieme* $C=\{(x,y):y^x+\log(\frac{y^2}{x})=1\}$ *nel punto* $(1,1)$.

Sia $f(x,y)=y^x+\log(\frac{y^2}{x})=e^{x\log y}+2\log y-\log x$. Allora l'equazione della retta cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=0.$$

Dato che

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^x\log y-\frac{1}{x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=y^x\frac{x}{y}+\frac{2}{y},$$

si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3$$
e la retta cercata è $3y - x - 2 = 0$.

9. *Classificare i punti stazionari di* $f(x,y) = x^2 + 2xy + \log(x - 3y)$.

Dato che f è infinitamente derivabile nel suo dominio $x - 3y > 0$ dobbiamo prima risolvere $\nabla f = 0$, ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + \dfrac{1}{x-3y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x - \dfrac{3}{x-3y} = 0 \\ x - 3y > 0 \end{cases} \qquad \text{o anche} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x-3y} = -(2x+2y) \\ 4x + 3y = 0 \\ x - 3y > 0 \end{cases}$$

che dà la soluzione $x = \sqrt{\frac{3}{10}}$, $y = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{10}}$. Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \frac{1}{(x-3y)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 + \frac{3}{(x-3y)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{9}{(x-3y)^2}$$

Dato che l'hessiano è negativo nel punto trovato, si ha un punto di sella.

10. *Calcolare* $\int_\gamma \omega$, *dove* $\omega = \frac{3y}{x^2+y^2}dx - \frac{2x}{x^2+y^2}dy$ *e* $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (-\cos t, \sin t)$.

Basta applicare la definizione, con $dx = \sin t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$ per cui si deve calcolare
$$\int_{-\pi}^{\pi} (3\sin^2 t + 2\cos^2 t)\, dt.$$
Il calcolo si effettua per esempio usando le formule di duplicazione o ricordando che
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2)\, dt = \pi.$$
Il risultato è quindi 5π.

11. *Dire per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'insieme* $\{(x,y) : (x^2 - \alpha y^2)(x^2 - y + \alpha) = 0\}$ *definisce implicitamente una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.*

Dobbiamo esaminare separatamente gli insiemi definiti da

$$x^2 - \alpha y^2 = 0, \qquad x^2 - y + \alpha = 0$$

e quindi la loro unione.

L'insieme $x^2 - y + \alpha = 0$ è una parabola con asse l'asse delle y.

L'insieme $x^2 - \alpha y^2 = 0$ è dato da:

1) due rette trasversali che si incontrano in $(0,0)$ per $\alpha > 0$ (quindi in questo caso già questo insieme non è una curva regolare in $(0,0)$)

2) l'asse delle y per $\alpha = 0$ (che interseca la parabola $y = x^2$ in $(0,0)$ e quindi non è una curva regolare in questo punto)

3) il punto $(0,0)$ per $\alpha < 0$ (che è esterno alla parabola $x^2 - y + \alpha = 0$, e quindi l'insieme non è una curva regolare in $(0,0)$).

Dunque l'insieme in questione non definisce mai una curva regolare nell'intorno di $(0,0)$.

12. *Trovare massimo e minimo assoluti di* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ *sull'insieme* $\{(x,y): \ |x| + |y| \leq 1\}$.

Eventuali punti stazionari interni si trovano ponendo $\nabla f = 0$. Questo dà la soluzione $x = y = -1$ che è esterna all'insieme. Dunque massimi e minimi, che esistono per il teorema di Weierstrass, sono sulla frontiera, che è composta dai quattro lati del quadrato di vertici $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.

Possiamo parametrizzare la frontiera quindi con

(a) I quattro vertici, su cui la funzione assume i valori 3 e -1.

(b) I quattro lati:

(b1) $y = 1 - x$, $0 < x < 1$, su cui la funzione diventa $f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 + 2x + 2(1-x) = 2x^2 - 2x + 3$, che ha un minimo in $x = 1/2$, che vale $5/2$;

(b2) $y = x - 1$, $0 < x < 1$, su cui la funzione diventa $f(x, x-1) = x^2 + (x-1)^2 + 2x + 2(x-1) = 2x^2 + 2x - 1$, che non ha punti stazionari;

(b3) $y = 1 + x$, $-1 < x < 0$, su cui la funzione diventa $f(x, 1+x) = x^2 + (1+x)^2 + 2x + 2(1+x) = 2x^2 + 6x + 3$, che non ha punti stazionari;

(b4) $y = -x - 1$, $-1 < x < 0$, su cui la funzione diventa $f(x, -x-1) = x^2 + (x+1)^2 + 2x - 2(x+1) = 2x^2 + 2x - 1$, che ha un minimo in $x = -1/2$, che vale $-3/2$.

In conclusione il minimo è $-3/2$, ottenuto nel punto $(-1/2, -1/2)$, e il massimo è 3, ottenuto nei punti $(0,1)$ e $(1,0)$. La stessa conclusione si ottiene facilmente usando i moltiplicatori di Lagrange.

13. *Calcolare* $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, *dove* $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4,\ x^2+2x+y^2 \geq 0\}$.

Il dominio è costituito dai punti esterni alla circonferenza di centro $(-1,0)$ e raggio 1 e interni alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2. In coordinate polari il domino diventa:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 2, \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi,\ -2\cos\theta \leq \rho \leq 2,$$

per cui l'integrale è

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho^2\, d\rho\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_{-2\cos\theta}^{2} \rho^2\, d\rho\, d\theta = \frac{8}{3}\pi + \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}} (1+\cos^3\theta)\, d\theta.$$

L'ultimo integrale si svolge con la sostituzione $s = \sin\theta$. Tralascio i dettagli.

14. *Calcolare l'area della parte della superficie cilindrica* $x^2+y^2 = 2x$ *interna alla sfera* $x^2+y^2+z^2 \leq 4$.

La superficie in questione ha come base sul piano xy la circonferenza $x^2+y^2 = 2x$ e altezza data da $z^2 \leq 4-x^2-y^2$ ($= 4-2x$ sostituendo l'equazione della circonferenza), ovvero $2\sqrt{4-2x}$. Se γ indica una parametrizzazione della circonferenza $x^2+y^2 = 2x$ l'area è quindi

$$\int_\gamma 2\sqrt{4-2x}.$$

Una parametrizzazione di γ è

$$x = 1+\cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

per la quale $\|\gamma'\| = 1$ e l'integrale diventa

$$2\int_0^{2\pi} \sqrt{4-2(1-\cos\theta)}\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta.$$

L'integrale si risolve con la sostituzione $\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1$. Tralascio i conti.

15. *Calcolare il dominio di convergenza e la somma di* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$.

Dato che la serie di Taylor dell'arcotangente converge per $|x| \leq 1$ (per $x = \pm 1$ si può usare Leibniz) e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x,$$

la nostra serie converge anch'essa nello stesso dominio e si ha, per $x \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{x}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - x\Big) = \frac{1}{x}\Big(\arctan x - x\Big).$$

Per $x = 0$ la somma della serie è 0.

16. *Calcolare, se esiste, il limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^4} \log\Big(\frac{x^2+x^4+y^4-y^8}{x^2+y^4}\Big)$.

Esaminiamo l'andamento della funzione sugli assi:

• sull'asse delle x (ovvero per $y = 0$) si ha

$$\frac{1}{x^2+y^4} \log\Big(\frac{x^2+x^4+y^4-y^8}{x^2+y^4}\Big) = \frac{1}{x^2} \log\Big(\frac{x^2+x^4}{x^2}\Big) = \frac{1}{x^2} \log\Big(1+x^2\Big).$$

Per il limite notevole

$$\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log\Big(1+x^2\Big) = 1$$

• sull'asse delle y (ovvero per $x = 0$) si ha

$$\frac{1}{x^2+y^4} \log\Big(\frac{x^2+x^4+y^4-y^8}{x^2+y^4}\Big) = \frac{1}{y^4} \log\Big(\frac{y^4-y^8}{y^4}\Big) = \frac{1}{y^4} \log\Big(1-y^4\Big).$$

che tende a -1 per $y \to 0$.

Dunque sull'asse delle y il limite è -1 mentre sull'asse delle x è 1, quindi non esiste.

17. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = (\cos(x-y))^{\log(x+1)}$ *nel punto* $x = y = 1$.

Si ha

$$\nabla f = (\cos(x-y))^{\log(x+1)} \Big(\frac{\log\cos(x-y)}{x+1} - \tan(x-y)\log(x+1), \tan(x-y)\log(x+1)\Big),$$

per cui

$$f(1,1) = 1^{\log 2} = 1, \qquad \nabla f(1,1) = (0,0),$$

e quindi il piano tangente è

$$z = 1.$$

18. *Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma \Big((x^2 + 2y + y\sin(xy))\,dx + (2x + x\sin(xy))dy \Big)$ *dove* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, e^t \sin t\pi)$.

Un potenziale è dato da

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2xy - \cos(xy),$$

per cui l'integrale vale

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,0) - f(0,0) = \frac{1}{3}.$$

19. *Dire se l'equazione* $(x^2+y^2)(\cos(x-y) - e^{x-y}) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $\varphi = \varphi(y)$ *in un intorno di* $(0,0)$*, e, se tale* φ *esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine* 1*.*

Dato che $f(x,y) = \cos(x-y) - e^{x-y} = 0$ per $x - y = 0$ (e $x^2 + y^2 = 0$ solo in questo punto) questa equazione è equivalente alla prima. Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = (-\sin(x-y) - e^{x-y}, \sin(x-y) + e^{x-y})$$

per cui

$$\nabla f(0,0) = (-1, 1),$$

da cui, per il teorema di Dini la φ cercata esiste e, dato che la retta tangente all'insieme delle soluzioni in $(0,0)$ è $y = x$, questo è lo sviluppo cercato.

20. *Trovare massimi e minimi assoluti di* $f(x,y) = ye^{x^2}$ *sulla circonferenza di centro* 0 *e raggio* 1*.*

Per il teorema di Weierstrass massimo e minimo esistono. Usiamo i moltiplicatori di Lagrange per trovare i punti stazionari (tra i quali cercare massimo e minimo): si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2xye^{x^2} = 2x\lambda \\ e^{x^2} = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Una soluzione è $x = 0$, $y = \pm 1$ (e $\lambda = \pm 1/2$). Altrimenti si ha $\lambda = ye^{x^2}$ e, sostituendo,

$$\begin{cases} 1 = 2y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui $x = \pm 1\sqrt{2}$ and $y = \pm 1\sqrt{2}$.

Sostituendo i valori ottenuti:

$$f(0, \pm 1) = \pm 1, \qquad f\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{e}{2}}.$$

Dunque, dato che $e > 2$, massimo e minimo sono $\pm\sqrt{\frac{e}{2}}$.

21. *Sia* $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq 1\}$. *Calcolare* $\iiint_D |y| dx\, dy\, dz$.

Possiamo integrare per fili e usare la parità di $|y|$ e $\sqrt{1 - y^2}$

$$\iiint_D |y| dx\, dy\, dz = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} |y| 2\sqrt{1-y^2} dx\, dy = 2 \iint_{\{x^2+y^2\leq 1, y>0\}} 2y\sqrt{1-y^2} dx\, dy$$

$$= 2\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\, 2y\sqrt{1-y^2}\, dy = 4\int_0^1 2y(1-y^2)\, dy = 2[-(1-y^2)^2]_0^1 = 2.$$

Si può anche integrare prima in dy:

$$2\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2y\sqrt{1-y^2}\, dy\, dx = -\frac{4}{3}\int_{-1}^1 [(1-y^2)^{3/2}]_0^{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{4}{3}\int_{-1}^1 \Big(\frac{1}{3} - \frac{|x|^3}{3}\Big)\, dx$$

e quindi si conclude (qui bisogna fare attenzione che $(x^2)^{3/2} = |x|^3$ e non x^3).

22. *Calcolare, se esiste, il limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\arctan(xy) - y\log(1+x^2)}{yx^4}$.

Il punto $(0, 0)$ è di accumulazione per la funzione in esame, quindi possiamo calcolare il limite. Usando gli sviluppi di Taylor

$$x\arctan(xy) = x(xy + o(x^3y)) = x^2y + o(x^4y)$$

$$y\log(1+x^2) = y\Big(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\Big) = yx^2 - \frac{1}{2}yx^4 + o(yx^4)$$

Dunque

$$\frac{x\arctan(xy) - y\log(1+x^2)}{yx^4} = \frac{\frac{1}{2}yx^4 + o(yx^4)}{yx^4} = \frac{1}{2} + o(1)$$

e il limite è $\frac{1}{2}$.

23. *Discutere il dominio e classificare i punti stazionari di* $f(x,y) = x\log(y+yx)$.

Il dominio è dato dalla relazione $y(1+x) > 0$ e quindi consta di due quadranti $\{x > -1, y > 0\}$ e $\{x < -1, y < 0\}$.

Il gradiente di f è

$$\Big(\log(y+yx) + \frac{x}{1+x}, \frac{x}{y}\Big)$$

che si annulla per $x = 0$ e $y = 1$. Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-x}{y^2}$$

Per $x = 0$ e $y = 1$ il determinante della matrice hessiana è -1 e quindi si ha un punto di sella.

24. *Calcolare* $\int_\gamma \Big(\frac{y+x^2+y^2}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy\Big)$ *dove* $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$.

Possiamo applicare direttamente la definizione:

$$\int_0^{2\pi} \Big(\Big(\frac{\cos t}{\sin t^2 + \cos t^2} + 1\Big)\cos t + \frac{\sin t}{\sin t^2 + \cos t^2}\sin t\Big)dt = \int_0^{2\pi} (1+\cos t)dt = 2\pi.$$

25. *Dire per quali valori di* α *l'insieme* $\{(x,y) : (\alpha x - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - \alpha^2) = 0\}$ *definisce una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.*

Per simmetria possiamo discutere solo il caso $\alpha \geq 0$, dato che se (x,y) appartiene all'insieme per un certo α, allora $(-x,y)$ appartiene all'insieme per $-\alpha$.

Per $\alpha = 0$ l'equazione $\alpha x - y^2 - 1 = 0$ non ha soluzione e $x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$ è un punto, dunque non si ha una curva regolare.

Per $\alpha > 0$ l'equazione $\alpha x - y^2 - 1 = 0$ rappresenta una parabola di vertice $(1/\alpha, 0)$ e $x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$ è una circonferenza di centro 0 e raggio α. L'insieme è regolare se le due curve non si intersecano, ovvero se il vertice della parabola è esterno alla corconferenza, ovvero

$$\frac{1}{\alpha} > \alpha,$$

che dà $\alpha < 1$.

Per $\alpha < 0$ si ha invece la condizione $\alpha > -1$.

In conclusione, la risposta è $|\alpha| < 1$ e $\alpha \neq 0$.

26. *Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x,y) = x^4y - x^3y^2$ sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ usando i moltiplicatori di Lagrange ove possibile.*

I punti stazionari liberi di f sono dati da

$$\begin{cases} 4x^3y - 3x^2y^2 = 0 \\ x^4 - 2x^3y = 0. \end{cases}$$

Eventuali punti stazionari interni al triangolo verificano

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ha la sola soluzione $x = y = 0$ quindi non vi sono punti stazionari interni.

Vediamo i punti del bordo. Dato che la funzione è 0 su due lati, basta esaminare il lato tra i punti $(1,0)$ e $(0,1)$, di equazione $x + y = 1$ e normale $(1,1)$. Il sistema è dunque

$$\begin{cases} 4x^3y - 3x^2y^2 = \lambda \\ x^4 - 2x^3y = \lambda \\ x + y = 1, \quad 0 < x, y < 1 \end{cases}$$

da cui

$$4x^3y - 3x^2y^2 = x^4 - 2x^3y$$

e (semplificando per x^2)

$$4xy - 3y^2 = x^2 - 2xy, \qquad x^2 - 6xy + 3y^2 = 0\,.$$

Dunque

$$\begin{cases} x = (3 \pm \sqrt{6})y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

da cui si ottengono i due punti cercati.

27. *Sia $D = \{(x,y) : (|x|+1)^2 + (|y|+1)^2 \leq 5\}$. Disegnare D e calcolare $\displaystyle\iint_D (1 + |y|)\,dx\,dy$.*

L'insieme è simmetrico rispetto a x e y. Basta disegnarlo nel primo quadrante, dove è la parte del cerchio di centro $(-1,-1)$ e raggio $\sqrt{5}$.

L'integrale è 4 volte l'integrale su $D_+ = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, ovvero

$$4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{5-(y+1)^2}-1} dx(y+1)dy = 4\int_0^1 (\sqrt{5-(y+1)^2}-1)(y+1)dy$$
$$= 2\Big[-\frac{2}{3}(5-(y+1)^2)^{3/2} - (y+1)^2\Big]_0^1 = \frac{10}{3}.$$

28. *Dire se è differenziabile in* $(0,0)$ *la funzione* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se } x = y = 0 \end{cases}.$

Dato che le derivate parziali sono entrambe nulle, si deve vedere se $f(x,y) = o(|(x,y)|)$, ovvero se è nullo il limite

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Passando in coordinate polari (o considerando la restrizione a $x = y$) si vede che il limite non esiste, e f non è differenziabile.

29. *Disegnare il dominio della funzione* $f(x,y) = \sqrt{(x-y^2)(x+y)}$.

Si divide il piano in quattro regioni tracciando i grafici della parabola $x - y^2 = 0$ e la retta $x - y = 0$. Per determinare quale regione è nel dominio ci si deve ricordare di tenere conto della regola dei segni.

30. *Trovare i punti di massimo e minimo relativi della funzione* $f(x,y) = \sqrt{(y^2-x)(x+y)}$.

Dato che f è una radice (e quindi non negativa), i punti di minimo assoluto sono il bordo del dominio, dove $f(x,y) = 0$. Basta quindi esaminare i punti interni, dove possiamo porre $\nabla f(x,y) = 0$, per cui si ottiene (si semplifica, di poco, il calcolo se si nota che basta cercare i punti stazionari di $g(x,y) = (y^2-x)(x+y)$)

$$\begin{cases} g_x = -(x+y) + (y^2-x) = 0 \\ g_y = 2y(x+y) + (y^2-x) = 0, \end{cases}$$

ovvero (sottraendo la prima equazione alla seconda)

$$\begin{cases} 2x = -y + y^2 \\ 2y(x+y) + (x-y) = (x+y)(2y+1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Questo punto sta nel dominio di f. Calcolando la matrice Hessiana di g in questo punto, si vede che è definita negativa, ovvero si ha un massimo relativo.