Esercizi di ripasso - Seconda parte

Andrea Braides

1. Disegnare approssimativamente il dominio della funzione

$$f(x,y) = \log(x^2 + xy) - \sqrt{1 - y^2 - 2x}$$

e dire se è un insieme chiuso, aperto o limitato.

2. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + x^4 + x^2y^2 + y^4 + y^2 \sin x^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4}.$$

3. Calcolare il piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = x^{(e^y)} + e^{(x^y)}$$

per $x = 2$ e $y = 0$.

4. Calcolare il gradiente in $(0,0)$ e dire se è differenziabile in $(0,0)$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Trovare i punti stazionari, e classificarli se possibile mediante lo studio della matrice hessiana, di

$$f(x,y) = \log(x - y) - x^2 - y^2.$$

6. Trovare massimi e minimi di $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ sui seguenti insiemi, parametrizzandone la frontiera:
(a) triangolo chiuso di vertici $(0,2)$, $(1,0)$ e $(2,2)$;
(b) palla chiusa di centro $(1,0)$ e raggio 2;
(c) interno dell'ellisse $4x^2 + 9y^2 = 1$;
(d) $\{(x,y) : y - 2 \leq x \leq 1 - y^2\}$.

7. Calcolare massimi e minimi della funzione $f(x,y) = x - y^2$ sull'insieme $D = \{(x,y) : 0 \le x + 1 \le y^2\}$, disegnando D e le linee di livello di f.

8. Calcolare massimi e minimi della funzione $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ (*Suggerimento: studiare la funzione $g(\rho) = \rho^2 e^{-\rho^2}$ e dedurne i massimi e minimi di f*).

9. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $C_\alpha = \{(x,y) : (x^2 + 4y^2 - 1)(xy - 1) = 0\}$ definisce una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.

10. Sia

$$C = \{(x,y) : \log(x^2 + y^2) + (1 + \sin x)^y = 1\}.$$

a) calcolare (se esiste) la retta tangente a C nel punto $(0,1)$;

b) dire se in un intorno di $(0,1)$ l'insieme definisce implicitamente una funzione $\varphi(x)$ e/o $\psi(y)$;

c) in tal caso calcolare il polinomio di Taylor di ordine 1 di φ in $x = 0$ e/o ψ in $y = 1$.

11. Trovare massimi e minimi di $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ sugli insiemi dell'esercizio **6** usando i moltiplicatori di Lagrange.

12. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (e^{-t^2}, e^{-2t^2}).$$

a) disegnare il sostegno di γ;

b) trovarne i punti stazionari ed indicarli nel disegno;

c) calcolare $\int_\gamma x\,ds$ (*Suggerimento: scrivere γ come l'unione di due curve regolari e cambiare parametrizzazione usandone una più semplice, suggerita dal punto* a)).

13. Calcolare $\int_\gamma x\,ds$, dove γ è una parametrizzazione della parte del cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1 contenuta nel semipiano $x \ge 0$.