Forme differenziali e integrali di seconda specie

Andrea Braides

Negli esercizi **1–10**, ove possibile, verificare se le forme differenziali sono chiuse e, se esatte, calcolarne un potenziale.

1. Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (t^2, \sin(\pi t))$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove

$$\omega = (1 + y^2 - ye^x)dx - (e^x + \sin y - 2xy)dy.$$

2. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \Big((x^2 + 2y + y\sin(xy))\, dx + (2x + x\sin(xy))dy\Big)$ dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, e^t \sin t\pi)$.

3. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \Big(\frac{y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy\Big)$ dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \sin t)$ e $\omega = 2e^{2x} y\, dx + e^{2x}\, dy$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \sin \pi t)$ e $\omega = 2e^{2x} y\, dx + (e^{2x} + x)\, dy$.

6. Sia $\gamma : \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$.
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \Big(\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy\Big)$.

7. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove $\omega = \dfrac{x+1}{x^2 + y^2} dy - \dfrac{2y}{x^2 + y^2} dx$ e $\gamma : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t \sin t, \cos^2 t)$.

8. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove $\omega = \dfrac{3y}{x^2 + y^2} dx - \dfrac{2x}{x^2 + y^2} dy$ e $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (-\cos t, \sin t)$.

9. Sia $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1 + \cos t, 2 - \sin t)$. Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove

$$\omega = \Big(x + 3x^2 \log y\Big) dx + \Big(\frac{x^3}{y} - 1\Big) dy.$$

10. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} dx - \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} dy$ dove $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$

11. Trovare una parametrizzazione γ in senso antiorario della frontiera dell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|x| - 1)^2 + y^2 \leq 2\}$ e calcolare $\int_\gamma x^2 \, dy$.

12. Sia D la parte del piano dei punti (x, y) tali che $x \leq 2y - y^2$ e $y \geq x + 2$. Parametrizzare la frontiera di D in senso antiorario e calcolarvi l'integrale di $\omega = x \, dx + (x + y) \, dy$.

13. Sia $\omega = \Big(p^2 x e^{x^2+y} + \cos(x + y^2)\Big) \, dx + \Big(e^{x^2+y} + p^2 y \cos(x + y^2)\Big) \, dy$.
Dire per quali valori del parametri p è una forma esatta e calcolarne il potenziale.

14. Determinare e risolvere l'equazione differenziale soddisfatta da una funzione $f(x)$ di modo che la forma differenziale $\omega = f(x)y \, dx + (f(x) + y) \, dy$ sia chiusa. Determinarne quindi un potenziale.

15. Determinare e risolvere l'equazione differenziale soddisfatta da una funzione $f(x)$ di modo che la forma differenziale $\omega = f^2(x)y \, dx + (f^2(x) + y^2) \, dy$ sia chiusa. Scelta una tale f (non nulla) determinarne quindi un potenziale.

16. Determinare e risolvere l'equazione differenziale soddisfatta da una funzione $f(x)$ di modo che la forma differenziale $\omega = x^2 y \, dx + (f^2(x) + y) \, dy$ sia chiusa. Scelta una tale f determinarne quindi un potenziale.

17. Trovare una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identicamente nulla tale che la forma differenziale
$\omega = 2ye^{f(x)} dx + (e^{f(x)} + 2y) dy$ sia esatta e calcolarne un potenziale.

18. Determinare una funzione f tale che la forma differenziale $\omega = f(y) \, dx + (x \sin y + e^y) \, dy$ sia esatta e determinarne un potenziale.

19. Dire se le seguenti forme sono esatte e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale:

1) $\omega = \dfrac{1}{1+y^2} dx - \dfrac{2xy}{(1+y^2)^2} dy$; 2) $\omega = (2y + x)dx + (2x - 1)dy + 4z \, dz$;

3) $\omega = e^y (\sin(x + y)dx - e^y(\cos(x + y) - \sin(x + y))dy$;

4) $\omega = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$; 5) $\omega = y^2 dx + \Big(\dfrac{1}{y} + 2xy\Big) dy$.