

Integrali di prima specie

Andrea Braides

1. Sia γ una parametrizzazione della porzione curva data da $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ in coordinate polari che giace nel semipiano $x \geq 0$. Calcolare $\int_{\gamma} (x + y)$
2. Calcolare la lunghezza della *cicloide*, ovvero la curva percorsa in un periodo da un punto sul bordo di un cerchio che rotola su un piano.
3. Calcolare la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho = \cos \theta$.
4. Calcolare $\int_{\gamma} |xy|$ dove γ parametrizza il bordo di $\{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} \leq 2\}$.
5. Calcolare l'area della parte della superficie cilindrica $x^2 + y^2 = 2x$ interna alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. (Notare che l'area può essere vista come la parte di cilindro con z compreso tra $\pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e (x, y) sul sostegno della parte della curva $x^2 + y^2 = 2x$ interna al cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$. L'esercizio consiste quindi nel trovare una parametrizzazione di tale γ e calcolare $2 \int_{\gamma} \sqrt{4 - x^2 - y^2} ds$).
6. Calcolare l'area della superficie laterale del cilindro parabolico $y = \frac{3}{8}x^2$ limitata dai piani $x = 0$, $z = 0$, $y = 6$ e $z = x$.
7. Calcolare $\int_{\gamma} \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$ dove γ parametrizza la prima spirale dell'elica cilindrica
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$
8. Calcolare la lunghezza dell'elica conica
$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \\ z(t) = e^t \end{cases}$$
 tra $(0, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$.
9. Calcolare la lunghezza della spirale logaritmica, parametrizzata in coordinate polari da $\rho = ae^{m\theta}$ con $\theta \in (-\infty, 0]$.