Funzioni definite implicitamente

Andrea Braides

1. Calcolare la retta tangente all'insieme $C = \{(x,y) : y^x + \log(\frac{y^2}{x}) = 1\}$ nel punto $(1,1)$

2. Scrivere l'equazione della retta tangente all'insieme
$C = \{(x,y) : e^{x+y} \log|x-y+1| + \sin(\pi x/y) = 0\}$ nel punto $(1,1)$.

3. Scrivere l'equazione della retta tangente all'insieme
$C = \{(x,y) : x^y + \sin(x \log y) = 1\}$ nel punto $(1,1)$.

4. Scrivere l'equazione della retta tangente all'insieme
$C = \{(x,y) : x^{(y^2)} - \log\Big(\dfrac{x+1}{y+1}\Big) = 1\}$ nel punto $x = y = 1$.

5. Scrivere l'equazione della retta tangente all'insieme
$C = \{(x,y) : (\cos(x-y))^{\log(x+1)} = 1\}$ nel punto $x = y = 1$.

6. Dire se l'equazione $\sin(xe^y) + \log(\cos(x+y)) = 0$ definisce implicitamente una funzione $\varphi = \varphi(y)$ in un intorno di $(0,0)$, e, se esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine 1.

7. Dire se l'equazione $(x^2+y^2)(\cos(x-y) - e^{x-y}) = 0$ definisce implicitamente una funzione $\varphi = \varphi(y)$ in un intorno di $(0,0)$, e, se tale φ esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine 1. (*Suggerimento*: semplificare prima l'equazione)

8. Dire se l'equazione $(x^2+y^2)(xe^y - \sin(x^2 - \sin y)) = 0$ definisce implicitamente una funzione $\varphi = \varphi(y)$ in un intorno di $(0,0)$, e, se tale φ esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine 1.

9. Dire per quali punti (x,y) l'espressione $x^4y^2 + x^3y^3 - xy = 0$ non definisce una funzione implicita $y = \varphi(x)$ in un intorno di (x,y). Calcolare φ' in uno degli altri punti a scelta con $xy \neq 0$.

10. Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$C = \{(x,y) : (x^2+y^2-\alpha)(y^2-x) = 0\}$$

definisce implicitamente una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.

11. Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 + \alpha x^2)(x^2 - 2x + y^2) = 0\}$$

definisce implicitamente una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.

12. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{(x, y) : (x^2 - \alpha y^2)(x^2 - y + \alpha) = 0\}$ definisce implicitamente una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.