Esercizi su derivate direzionali, gradiente, piano tangente

Andrea Braides

1. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni nel generico punto del dominio.
(a) $f(x,y) = x^2 + 4xy - 2xy^2$
(b) $f(x,y) = ye^{4x^3}$
(c) $f(x,y) = y^3 e^{-xy}$
(d) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$
(e) $f(x,y) = e^{x/y^2}$

2. Calcolare (se esiste) il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati:
(a) $f(x,y) = 2xye^{\sqrt{|x+y|}}$ in $(0,0)$
(b) $f(x,y) = |x+y|\sin(x+y^2)$ in $(0,0)$
(c) $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $(0,0)$
(d) $f(x,y) = (x-y)\sqrt{|y^2 - x|}$ in $(1,1)$

3. Determinare le derivate direzionali[1] delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:
(a) $f(x,y) = x^2 + xy - 4$ in $(1,0)$ nella direzione $v = (2,1)$
(b) $f(x,y) = e^y \cos x$ in $(0,0)$ nella direzione del vettore $v = (2,1)$
(c) $f(x,y) = |y^2 - xy|$ in $(0,0)$ nella direzione del vettore $v = (1,1)$

4. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni:
(a) $f(x,y) = x^3 - y^3$ per $(x,y) = (0,1)$
(b) $f(x,y) = x^y + y^x$ per $(x,y) = (1,1)$
(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ per $(x,y) = (2,0)$

5. Calcolare le derivate parziali e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = e^{x+y}\log|x-y+1| + \sin\left(\pi \dfrac{x}{y}\right)$ nel punto $(x,y) = (1,1)$.

[1] Si definisce la derivata direzionale $D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$ (se il limite esiste) per ogni $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ anche se $\|v\| \neq 1$

(b) $f(x,y) = x^{(y^2)} - \log\left(\dfrac{x+1}{y+1}\right)$ nel punto $x = y = 1$.

(c) $f(x,y) = (\cos(x-y))^{\log(x+1)}$ nel punto $x = y = 1$.

(d) $f(x,y) = x^y + \sin(x \log y)$ nel punto $(x,y) = (1,1)$.

6. Dire se è differenziabile in $(0,0)$ la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{5/3}|y|^{3/2}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$

7. Dire se è differenziabile in $(0,0)$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}.$