

# Integrali doppi e cambi di coordinate

Andrea Braides

Risolvere gli esercizi da **1** a **4** usando le coordinate polari.

1. Calcolare l'integrale doppio  $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , dove  $D$  è dato dalle relazioni

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 1.$$

2. Calcolare l'integrale doppio  $\iint_D y dx dy$ , dove  $D$  è il semicerchio di centro  $(1, 0)$  e raggio 1 contenuto nel semipiano  $y \geq 0$ .

3. Calcolare l'area della parte di piano delimitata dalle superfici di equazioni  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$ , e  $y = 0$ .

4. Calcolare l'area della parte di piano data da  $\cos \theta \leq \rho \leq 1 + \cos \theta$ .

Risolvere gli esercizi da **5** a **8** usando le simmetrie di insieme di integrazione e funzione integranda, ed eventualmente le coordinate polari.

5. Calcolare l'integrale doppio  $\iint_D (x^2 \sin y + |xy|) dx dy$ , dove  $D$  è dato dalle relazioni  $x^2 + y^2 \leq 1$  e  $x^2 - y^2 \leq 0$ .

6. Calcolare  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , dove  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + 2x + y^2 \geq 0\}$ .

7. Calcolare  $\iint_D (xy + 1) dx dy$ , dove  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, \frac{1}{\sqrt{3}}|x| \leq |y| \leq \sqrt{3}|x|\}$ .

8. Calcolare l'integrale doppio  $\iint_D (x^2 y + |x|) dx dy$ , dove  $D = \{(x, y) : \sqrt{3}|y| \leq |x|, x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

**9.** Usando il cambio di variabili  $u = y/x^2$ ,  $v = x/y^2$  calcolare l'area dell'insieme del piano delimitato dalle parabole  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $x = y^2$  e  $x = 3y^2$ .

**10.** Calcolare  $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} dx dy$ , dove  $D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ . (Suggerimento: cambiare variabili e trasformare il dominio in un cerchio).

**11.** Calcolare l'area dell'ellisse  $\{(x, y) : (x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 \leq 100\}$ . (Suggerimento: cambiare variabili e trasformare il dominio in un cerchio).

**12.** Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  l'intersezione del cerchio di centro  $(0, 0)$  e raggio 1 e del cerchio di centro  $(1, 0)$  e raggio  $\sqrt{2}$ . Disegnare  $D$  e calcolare  $\iint_D |y| dx dy$ .

Nei seguenti esercizi interpretare gli insiemi come parti dello spazio comprese tra i grafici di due funzioni e usare le coordinate polari.

**13.** Calcolare il volume di  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 : x \geq \sqrt{y^2 + z^2}\}$ .

**14.** Calcolare il volume del solido delimitato da  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 - z^2 + 4 = 0$ .

**15.** Calcolare il volume della sfera di raggio  $r$ .