Serie numeriche - esercizi svolti

Andrea Braides

1 Testi

1) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}}$$

2) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7}}$$

3) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2+\sin(e^n))}{3^n}$$

4) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

5) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - n^2\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

6) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 1}}$$

7) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{\frac{n^4 + n^3}{n^9 + 1}}$$

8) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (\cos(\frac{1}{n}) - 1)^2$$

9) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3) - n^{3/5}}{n^{1/4} \log(n^n + n!)}$$

10) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4) + n^{5/3}}{n^{5/3} \log(n^n + n!)}$$

11) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\ 3^{n+2}}{n!}$$

12) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{n!\ 3^{n+2}}$$

13) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3 \log n} \right)^{\frac{n}{7} \sin(\frac{2}{n})}$$

14) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4 \log n} \right)^{\frac{n}{9} \sin(\frac{2}{n})}$$

15) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\log 10)^n}{n!}$$

16) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\log 2)^n}{n!}$$

17) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{(n+1)/2}}{(n-1)!}$$

18) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{11^{(n+1)/2}}{(n-1)!}$$

19) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log(1+3^n)}{n^2 \log(3n)} \right)^{n \sin(3/n)}$$

20) Si discuta il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log(1+3^n)}{n^2 \log(3n)} \right)^{n \sin(1/(3n))}$$

21) Sia E l'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ tali che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 + \log n}{n^\alpha \log(n+1)} \right)^{1/2}$$

sia divergente. Calcolare l'estremo superiore di E.

22) Sia E l'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ tali che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^5 + \log n}{n^\alpha \log(n+1)} \right)^{1/2}$$

sia convergente. Calcolare l'estremo inferiore di E.

23) Trovare il numero reale x tale che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^{n-1}}{(n-1)!} = -3.$$

24) Trovare il numero reale x tale che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^{n-1}}{(n-1)!} = 1.$$

2 Svolgimenti

1) Osserviamo che vale la doppia diseguaglianza

$$1 \leq 2 + \sin n \leq 3,$$

e quindi la serie è a termini positivi. Dunque la somma della serie esiste finita o uguale a $+\infty$. Inoltre valgono le diseguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}} \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Applicando due volte il criterio del confronto si ottiene che il carattere della serie in questione è lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

A sua volta, applicando il criterio del confronto asintotico, possiamo sostituire a $(n+1)$ semplicemente n (ovviamente $\lim_n \frac{n+1}{n} = 1$), ottenendo così la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Questa serie è una serie armonica generalizzata di parametro $\frac{2}{3}$, e diverge perchè $\frac{2}{3} < 1$.

2) La serie non è a termini di segno definito, quindi non si possono applicare i relativi criteri. Possiamo cercare di applicare il teorema della convergenza assoluta. Si ha

$$\left|\frac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7}}\right| = \frac{(n+1)|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

Alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}},$$

ora a termini positivi, possiamo applicare il criterio del confronto, ricordando che $|\cos n| \leq 1$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico quest'ultima serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}},$$

che è una serie armonica generalizzata di parametro $\dfrac{2}{3}$, ed è convergente poichè $\frac{4}{3} > 1$. Dunque la serie di partenza è assolutamente convergente, e quindi converge.

3) Osserviamo che vale la diseguaglianza

$$0 \leq n^2 - 1 \leq n^2 + \sin(e^n), \qquad \text{per ogni } n \geq 1$$

e quindi la serie è a termini positivi. Dunque la somma della serie esiste finita o uguale a $+\infty$. Notando che si ha

$$\lim_n \frac{n^2 + \sin(e^n)}{n^2} = 1,$$

si ha, per il criterio del confronto asintotico, che la nostra serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n^2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n n^2.$$

Applichiamo il criterio della radice n-ima asintotico. Ricordando che

$$\lim_n \sqrt[n]{n^2} = \lim_n e^{\frac{2}{n}\log n} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{x}\log x} = e^0 = 1,$$

otteniamo

$$L = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n n^2} = \frac{2}{3} \lim_n \sqrt[n]{n^2} = \frac{2}{3} < 1;$$

quindi la serie è convergente. Proponiamo uno svolgimento alternativo. Possiamo confrontare questa serie con una serie geometrica di ragione α con $1 > \alpha > \frac{2}{3}$, per esempio $\alpha = \frac{3}{4}$. Si ha

$$\lim_n \frac{(3/4)^n}{(2/3)^n n^2} = \lim_n \left(\frac{9}{8}\right)^n \frac{1}{n^2} = +\infty,$$

quindi per il criterio del confronto asintotico, la nostra serie converge, convergendo la serie geometrica di ragione $\frac{3}{4}$.

4) Ricordiamo che vale il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Si può quindi applicare il criterio del confronto asintotico tra le due successioni

$$n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n},$$

ottenendo che la serie in esame ha lo stesso carattere della serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ovvero è divergente.

5) Come nell'esercizio 4, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} n^4\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Ora si può applicare il criterio del confronto asintotico tra le due successioni

$$n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n^2},$$

ottenendo che la serie in esame ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata di parametro 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ovvero è convergente.

6) La serie è evidentemente a termini positivi, per cui o converge o diverge positivamente. Applichiamo il criterio del confronto asintotico con la serie relativa alla successione

$$n^{-\dfrac{15-6}{7}} = \frac{1}{n^{9/7}}.$$

Si ha infatti

$$\lim_n n^{\frac{9}{7}} \sqrt[7]{\frac{n^6+n^3}{n^{15}+1}} = \lim_n \sqrt[7]{\frac{n^9(n^6+n^3)}{n^{15}+1}} = \lim_n \sqrt[7]{\frac{n^{15}+n^{12}}{n^{15}+1}} = \lim_n \sqrt[7]{\frac{1+n^{-3}}{1+n^{-15}}} = 1$$

Quindi il carattere della serie in questione è lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/7}},$$

che è convergente poichè $\frac{9}{7} > 1$.

7) Analogamente all'esercizio precedente, applicando il criterio del confronto asintotico, si vede che la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

che diverge (positivamente).

8) La serie è a termini positivi. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, notando che

$$\lim_n n^2 \Big(\cos(\frac{1}{n}) - 1\Big) = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Dunque

$$\Big(\cos(\frac{1}{n}) - 1\Big)^2 \approx \frac{1}{4\,n^4}\,,$$

e il carattere della nostra serie è uguale a quello della serie $\sum_n \frac{1}{n}$, e quindi positivamente divergente.

9) Esaminiamo il segno del termine n-imo della serie. Si ha

$$\sin(n^3) - n^{\frac{3}{5}} \leq 1 - n^{\frac{3}{5}} \leq 0 \qquad \text{per ogni } n \geq 1,$$

mentre, dato che $n^n + n! > 1$,

$$\log(n^n + n!) > 0 \qquad \text{per ogni } n \geq 1,$$

quindi la serie è a termini *negativi* e dunque o converge o diverge *negativamente*. Applichiamo il criterio del confronto. Dato che si ha

$$\lim_n \frac{\sin(n^3) - n^{\frac{3}{5}}}{-n^{\frac{3}{5}}} = 1$$

e

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\log(n^n + n!)}{n \log n} &= \lim_n \frac{\log(n^n(1 + (n!/n^n))}{n \log n} = \lim_n \frac{\log(n^n) + \log(1 + (n!/n^n))}{n \log n} \\ &= \lim_n \frac{n \log n + \log(1 + (n!/n^n))}{n \log n} = 1, \end{aligned}$$

il carattere della serie in questione è uguale a quello della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{1}{4}} n \log n} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{13}{20}} \log n}.$$

Possiamo applicare il teorema del confronto . Dato che $\frac{13}{20} < 1$ possiamo fare il confronto con una serie armonica generalizzata divergente del tipo $-\sum n^{-\alpha}$, con $\frac{13}{20} < \alpha < 1$, per esempio $\alpha = \frac{3}{4}$. Si ha

$$\lim_n \frac{n^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{13}{20}} \log n} = \lim_n \frac{n^{\frac{1}{10}}}{\log n} = +\infty,$$

e quindi la nostra serie diverge (negativamente).

10) Procedendo come nell'esercizio precedente si vede che la serie è a termini *positivi*, e che, per il criterio del confronto asintotico, ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n},$$

e quindi diverge positivamente.

11) Dobbiamo calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\ 3^{n+2}}{n!}.$$

Tenendo presente che si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{R} \tag{3.11.1}$$

cerchiamo di trasformare la nostra serie in questa forma. Per prima cosa scriviamo

$$2^{n-1}\ 3^{n+2} = 2^n 2^{-1} 3^n 3^2 = \frac{9}{2} 6^n,$$

per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\ 3^{n+2}}{n!} = \frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}.$$

Sommando e sottraendo la quantità

$$\frac{9}{2} = \frac{9}{2} \frac{6^0}{0!},$$

si ottiene

$$\frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!} = \frac{9}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} - 1) = \frac{9}{2} (e^6 - 1).$$

12) Dobbiamo calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{n! 3^{n+2}}$$

Come nell'esercizio precedente cerchiamo di modificare la serie in modo da ritrovare una somma del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a.$$

Riscriviamo

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n+2}} = \frac{1}{36} \Big(\frac{2}{3}\Big)^n,$$

per cui
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{n!3^{n+2}}=\frac{1}{36}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\frac{1}{n!}$$
Sommando e sottraendo la quantità
$$\Big(\frac{2}{3}\Big)^0+\Big(\frac{2}{3}\Big)^1=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$
si ottiene
$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\frac{1}{n!}-\frac{5}{3}=e^{\frac{2}{3}}-\frac{5}{3},$$
e dunque
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{n!\,3^{n+2}}=\frac{1}{36}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\frac{1}{n!}=\frac{1}{36}\Big(e^{\frac{2}{3}}-\frac{5}{3}\Big).$$

13) La serie è evidentemente a termini positivi. Dal limite notevole
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
abbiamo il limite
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{7}\sin(\frac{2}{n})=\frac{2}{7}.$$
Fissato $\varepsilon>0$, esiste m numero naturale tale che si ha
$$\frac{2-\varepsilon}{7}\leq\frac{n}{7}\sin(\frac{2}{n})\leq\frac{2+\varepsilon}{7}$$
per ogni $n\geq m$. Si ha allora per ogni $n\geq m$
$$\left(\frac{1}{n^3\log n}\right)^{\frac{2+\varepsilon}{7}}\leq\left(\frac{1}{n^3\log n}\right)^{\frac{n}{7}\sin\left(\frac{2}{n}\right)}\leq\left(\frac{1}{n^3\log n}\right)^{\frac{2-\varepsilon}{7}}.$$
La serie
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3\log n}\right)^{\frac{2+\varepsilon}{7}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3(2+\varepsilon)}{7}}(\log n)^{\frac{2+\varepsilon}{7}}}$$
diverge se $\frac{3(2+\varepsilon)}{7}\leq 1$, ovvero $\varepsilon\leq\frac{1}{3}$, quindi prendendo per esempio $\varepsilon=\frac{1}{4}$ dalla prima delle diseguaglianze sopra e dal teorema del confronto si ha che la serie in esame diverge.

14) La serie è evidentemente a termini positivi. Si ha, come nell'esercizio precedente,

$$\lim_n \frac{n}{9}\sin(\frac{2}{n}) = \frac{2}{9}.$$

Confrontiamo la serie con quella relativa alla successione

$$\left(\frac{1}{n^4\log n}\right)^{\frac{2}{9}} = \frac{1}{n^{\frac{8}{9}}(\log n)^{\frac{2}{9}}}.$$

Il limite del rapporto tra le due successioni vale

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^4\log n}\right)^{\frac{n}{9}\sin\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{2}{9}} = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(\left(\frac{n}{9}\sin(\frac{2}{n})-\frac{2}{9}\right)\log\left(\frac{1}{n^4\log n}\right)\right).$$

Il limite dell'esponente si calcola facilmente, per esempio ricordando lo sviluppo del seno

$$\sin(\frac{2}{n}) = \frac{2}{n} - \frac{4}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}),$$

ottenendo

$$\lim_n\left(\frac{n}{9}\sin(\frac{2}{n})-\frac{2}{9}\right)\log\left(\frac{1}{n^4\log n}\right) = -\lim_n\frac{4}{27n^3}\log\left(\frac{1}{n^4\log n}\right) = 0.$$

Dunque il rapporto tra le due successioni tende a $e^0 = 1$, e per il criterio del confronto il carattere della serie in esame è uguale a quello della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{8}{9}}(\log n)^{\frac{2}{9}}}.$$

Questa serie diverge, per confronto con una serie armonica generalizzata di ragione α con $\frac{8}{9} < \alpha < 1$.

15) Si deve calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(\log 10)^n}{n!}.$$

Basta riscrivere (ricordando (3.11.1))

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(\log 10)^n}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\log 10)^n}{n!} = -e^{-\log 10} = -e^{\log(1/10)} = -\frac{1}{10}.$$

16) Lo svolgimento è analogo all'esercizio precedente. Si ottiene come risultato $-\frac{1}{2}$.

17) Dobbiamo calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!}.$$

Cerchiamo di ottenere un'esponenziale. Prima di tutto cambiamo variabile ponendo $k = n - 1$, per cui

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+2}\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!} = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^k}{k!};$$

quindi sommando e sottraendo $1 = (-\sqrt{2})^0$ si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^k}{k!} - 1 = e^{-\sqrt{2}} - 1,$$

e infine

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!} = 2(e^{-\sqrt{2}} - 1).$$

18) Lo svolgimento è uguale a quello dell'esercizio precedente, ottenendo come risultato

$$11(e^{-\sqrt{11}} - 1).$$

19) La serie è a termini positivi. Notiamo che

$$\log(1 + 3^n) \approx \log 3^n = n\,\log 3,$$

$$\log 3n = \log 3 + \log n \approx \log n,$$

per cui

$$\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log 3n} \approx \frac{1}{n\log n}$$

Dato che

$$\lim_{n} n\sin(\frac{3}{n}) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin 3x}{x} = 3,$$

si ha per n sufficientemente grande $n\sin(\frac{3}{n}) \geq 2$, e quindi anche

$$\Big(\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log 3n}\Big)^{n\sin\left(\frac{3}{n}\right)} \approx \Big(\frac{1}{n\log n}\Big)^{n\sin\left(\frac{3}{n}\right)} \leq \Big(\frac{1}{n\log n}\Big)^2 \leq \frac{1}{n^2}.$$

Dunque per il criterio del confronto (applicato per n sufficientemente grande) con la serie$\sum_n \frac{1}{n^2}$ la nostra serie converge.

20) Come nell'esercizio precedente si ha

$$\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log 3n} \approx \frac{1}{n\log n}.$$

Inoltre $\lim_n n\sin(\frac{1}{3n}) = \frac{1}{3}$, per cui, per n sufficientemente grande

$$n\sin(\frac{1}{3n}) \leq \frac{1}{2}.$$

Si ha quindi

$$\Big(\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log 3n}\Big)^{n\sin\left(\frac{1}{3n}\right)} \approx \Big(\frac{1}{n\log n}\Big)^{n\sin\left(\frac{1}{3n}\right)} \geq \Big(\frac{1}{n\log n}\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{n}.$$

Dunque per il criterio del confronto (applicato per n sufficientemente grande) con la serie armonica, la nostra serie diverge positivamente.

21) La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del confronto asintotico, ricordando che

$$\lim_n \frac{\log n}{n^2} = 0, \qquad \lim_n \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1,$$

e quindi il carattere della serie in questione è lo stesso del carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{n^2}{n^\alpha \log n}\Big)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}}|\log n|^{\frac{1}{2}}}.$$

Questa serie è convergente se $\frac{\alpha-2}{2} > 1$ (per confronto con la serie $\sum n^{(2-\alpha)/2}$), mentre diverge per $\frac{\alpha-2}{2} \leq 1$ (per confronto con la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n|\log n|^{\frac{1}{2}}}$).

Dunque si ha

$$E = \{\alpha \in \mathbf{R} : \ \frac{\alpha-2}{2} \leq 1\} =]-\infty, 4],$$

e $\sup E = 4$.

22) Come nell'esercizio precedente si deve studiare il carattere della serie (equivalente alla serie data, per il criterio del confronto asintotico)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha-5}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Procedendo come sopra si ha

$$E = \{\alpha \in \mathbf{R} : \ \frac{\alpha - 5}{2} > 1\} =]7, +\infty[,$$

e $\inf E = 7$.

23) Possiamo riscrivere la serie come

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^{n-1}}{(n-1)!} &= 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \\ &= 4 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 1 \Big) = 4(\exp(2x) - 1), \end{aligned}$$

quindi dobbiamo risolvere l'equazione

$$4(\exp(2x) - 1) = -3, \qquad \text{ovvero} \qquad \exp(2x) = \frac{1}{4},$$

da cui

$$2x = \log \frac{1}{4}, \qquad \text{e infine} \qquad x = \frac{1}{2} \log \frac{1}{4} = -\log 2.$$

24) Si procede come nell'esercizio precedente, ottenendo l'equazione

$$4(\exp(2x) - 1) = 1,$$

ovvero

$$x = \frac{1}{2} \log \Big(\frac{5}{4} \Big).$$