

Metodi Matematici per l'Ingegneria

5. Esercizi sul teorema delle proiezioni

1. Calcolare la proiezione in $L^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ di $x(t) = t$ sul sottospazio generato da $x_1(t) = \sin t$ e $x_2(t) = e^{it}$.
2. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t$, $x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = 1$.
 - (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la distanza della funzione $y(t) = \sin t$ da V .
3. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = e^{it}$, $x_2(t) = e^{-it}$ e $x_3(t) = \cos t$.
 - (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = e^t$ su V .
4. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos 2t$, $x_2(t) = 2 - \cos^2 t$ e $x_3(t) = \sin t$.
 - (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = t$ su V .
5. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos^2 t$, $x_2(t) = 1$ e $x_3(t) = \sin^2 t$.
 - (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = t$ su V .
6. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \sin t \cos t$ e $x_3(t) = \sin^2 t \cos t$.
 - (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = t - i$ su V .
7. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ e $x_3(t) = \sin t$.
 - (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = 1 - i$ su V .

- 8.** Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin 2t$, $x_2(t) = \cos^2 t$ e $x_3(t) = t$.
- (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = i - \sin t$ su V .
- 9.** Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin 2t$, $x_2(t) = t^2$ e $x_3(t) = t$.
- (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = i \cos t - t^4$ su V .
- 10.** Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos 2t$, $x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = t$.
- (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = it - t^3$ su V .
- 11.** Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin 2t$, $x_2(t) = \sin t$ e $x_3(t) = t^2$.
- (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = it^4 - t^2$ su V .
- 12.** Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \cos^2 t$ e $x_3(t) = t$.
- (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = i$ su V .
- 13.** Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos 2t$, $x_2(t) = \cos^2 t$ e $x_3(t) = i$.
- (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = t + 1$ su V .
- 14.** Sia V il sottospazio di $L^2(-1, 1)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 1$ e $x_3(t) = t^3$.
- (1) Trovare una base ortogonale di V ;
 - (2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = i - t^2$ su V .
- 15.** Sia V il sottospazio di $L^2(-1, 1)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ e $x_3(t) = t^4$. Trovare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V : \langle x, t^2 \rangle = 0\}$.
- 16.** Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = 1 + 2 \cos t$. Sia $y(t) = t^2$; trovare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0\}$.

17. Sia V_1 il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin^2 t$, $x_2(t) = \cos^2 t$ e $x_3(t) = \cos t$ e sia V_2 il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $y_1(t) = t$, $y_2(t) = |t|$. Determinare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V_1 : \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in V_2\}$.

18. Sia V_1 il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = \cos^2 t$ e sia V_2 il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \sin t$, $y_3(t) = \sin^2 t$, e $y_4(t) = \sin^3 t$. Determinare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V_2 : \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in V_1\}$.

19. Sia V il sottospazio di $L^2(-1, 1)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ e $x_3(t) = t^3$.

Trovare una base ortonormale di V ;

calcolare la proiezione di $x(t) = \cos \pi t - it^4$ su V ;

calcolare la distanza L^2 della funzione $w(t) = it^4$ da V .

20. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos 3t \sin 2t$, $x_3(t) = \cos 5t \sin 4t$