

# Metodi Matematici per l'Ingegneria

## 4. Esercizi su distribuzioni

### Derivate nel senso delle distribuzioni

Calcolare  $f'$  e  $f''$  nel senso delle distribuzioni delle seguenti funzioni (può essere utile disegnare un grafico approssimato di  $f$  e  $f'$  ove possibile).

1.  $f(x) = \chi_{(-\pi/2, \pi/2)}(x) \sin x$ .
2.  $f(x) = \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \pi)}(x) \sin x$ .
3.  $f(x) = \chi_{(-1, 1)}(x) (x - 1)(x + 4)$ .
4.  $f(x) = \min\{-1 + |x|, 0\} \chi_{(0, +\infty)}(x)$ .
5.  $f(x) = \chi_{(-1, 1)}(x) (x^2 - 1)^2$ . Di questa calcolare anche  $f'''$ .
6.  $f(x) = \chi_{(0, \pi)}(x) \cos x$ .
7.  $f(x) = \chi_{(-1, 1)}(x) (x - 1)(x^2 - 1)$ .
8.  $f(x) = \min\{-1 + \log(1 + x^2), 0\} \chi_{(0, +\infty)}(x)$ .
9.  $f(x) = \max\{1 - x^2, 0\} \chi_{(0, 1)}(x)$ .
10.  $f(x) = \min\{-1 + x^4, 0\} \chi_{(0, +\infty)}(x)$ .
11.  $f(x) = (x^2 - 1)^2 \chi_{(-1, 1)}(x)$ .
12.  $f(x) = (x^3 - 3x) \chi_{(-1, 1)}(x)$ .

### Convergenza nel senso delle distribuzioni

Calcolare il limite di  $f_h$  nel senso delle distribuzioni per  $h \rightarrow +\infty$  ( $H$  = funzione di Heaviside).

13.  $f_h(x) = H(x + h) \cos^2(hx)$ .
14.  $f_h(x) = H(x + h) |\sin(hx)| + \delta_h$ .
15.  $f_h(x) = h(\delta_{1/h} - \delta_{-1/h}) + \delta_h$ .
16.  $f_h(x) = h^2(\delta_{1/h^2} - \delta_{-1/h^2}) + h\delta_h$ .

17.  $f_h(x) = (H(x-h) - H(2h-x))|\cos(hx)|.$

18.  $f_h(x) = h^2\delta_h + |\cos(h^2x)|.$

19.  $f_h(x) = \left| \sin^2(hx) \cos(hx) \right|.$

20.  $f_h(x) = \left| \sin(hx) \cos(hx) \right|.$

21.  $f_h(x) = \left| \sin(hx) \cos\left(\frac{x}{h}\right) \right|.$

22.  $f_h(x) = \sin(hx) \cos\left(\frac{x}{h}\right).$

23.  $f_h(x) = \cos(hx) \sin\left(\frac{x}{h}\right).$

24.  $f_h(x) = h \max\{1 - h|x|, 0\}.$

25.  $f_h(x) = h^2\chi_{(0,1/h)}(x) - h^2\chi_{(-1/h,0)}(x) + \sin hx$

26.  $f_h(x) = \sin(hx)e^{-x^2/h}$ . Calcolare il limite anche di  $f_h^2$

27. Dire se le seguenti successioni di funzioni convergono per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}$ , in  $L^1(\mathbb{R})$  o nel senso delle distribuzioni:

$$f_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx^2}, \quad g_n(x) = e^{-nx^2}, \quad h_n(x) = e^{-(x-n)^2}.$$

28. Per ogni  $h \in \mathbb{N}$  sia  $f_h(x) = \min\{h|x|, 1\}$ .

(a) Calcolare  $f'_h$  e  $f''_h$  nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare i limiti di  $f'_h$  e  $f''_h$  nel senso delle distribuzioni per  $h \rightarrow +\infty$ .

29. Per ogni  $h \in \mathbb{N}$  sia  $f_h(x) = \chi_{(-\infty, h)}(x) \cos(2\pi hx)$ .

(a) Calcolare  $f'_h$  e  $f''_h$  nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare il limite di  $f'_h$  nel senso delle distribuzioni per  $h \rightarrow +\infty$ .

30. Per ogni  $h \in \mathbb{N}$  sia

$$f_h(x) = \begin{cases} \max\{hx + 1, 0\} & \text{se } x \leq 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcolare  $f'_h$  e  $f''_h$  nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare il limite di  $f'_h$  nel senso delle distribuzioni per  $h \rightarrow +\infty$ .

31. Per ogni  $h \in \mathbb{N}$  sia  $f_h(x) = \chi_{(-\infty, h)}(x) \sin(2\pi hx)$ .

(a) Calcolare  $f'_h$  e  $f''_h$  nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare il limite di  $f'_h$  nel senso delle distribuzioni per  $h \rightarrow +\infty$ .

32. Verificare che le soluzioni  $y$  degli esercizi da 8 a 14 sulle trasformate di Laplace risolvono le relative equazioni differenziali nel senso delle distribuzioni (ovvero, calcolando  $y'$  e  $y''$  nel senso delle distribuzioni le equazioni diventano delle identità)