

Metodi Matematici per l'Ingegneria

1. Esercizi su analisi complessa

Classificazione di punti singolari

1. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{\sin(z^2 + 1)}{z^2 - 1} \cos\left(\frac{1}{z + i}\right).$$

2. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{\sin(z^2 + 1)}{(z^4 - 1)^2} \cos\left(\frac{2\pi i}{z + i}\right).$$

3. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{e^{z^2-1} - 1}{(z^4 - 1)^2} \sin\left(\frac{\pi}{z + 1}\right).$$

4. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{(z^2 + 1)^2 z^2} e^{\frac{i}{z+i}}.$$

5. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(z^2 - 1)z} e^{\frac{2}{z-1}}.$$

6. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(x) = \frac{e^z + e^{-z} - 2}{(z^2 - 4)(z^2 + 9)} e^{\frac{2}{z}}.$$

7. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(x) = \frac{e^{z+2} - e^2}{(z - 1)(z^2 + 4z + 5)} \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Integrali su circuiti

8. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 2 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = \frac{1}{2}(1 + 3i)$ e raggio 1.
9. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 3 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = \frac{1}{2}(3 + i)$ e raggio 1.
10. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 4 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = i + 1$ e raggio 2.
11. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 5 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = i - 1$ e raggio 2.
12. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 6 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = 3$ e raggio 2.
13. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 7 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = 3/2$ e raggio 1.
14. (a) Scrivere l'integrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(4 + \cos t)} dt$ come un integrale sulla circonferenza $z = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$);
(b) Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.
15. (a) Scrivere l'integrale $\int_0^{2\pi} \frac{e^{-3it}}{(3 + \cos t)^2} dt$ come un integrale sulla circonferenza $z = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$);
(b) Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.
16. Calcolare $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 + \sin 2x} dx$.
17. Calcolare $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x} dx$.
18. Sia $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3 \cos z}$. Calcolare, se possibile, con il teorema dei residui l'integrale $\int_\gamma f(z) dz$, rispettivamente nei casi
(a) γ la circonferenza di centro 0 e raggio 1 in senso antiorario
(b) γ la circonferenza di centro 2 e raggio 1 in senso orario
19. Calcolare poli e residui di $f(z) = \frac{\cos z}{z(2z - \pi)^3}$. Calcolare, se possibile, con il teorema dei residui l'integrale $\int_\gamma f(z) dz$ rispettivamente nei casi
(a) γ la circonferenza di centro 0 e raggio 1 in senso antiorario
(b) γ la circonferenza di centro 2 e raggio 1 in senso orario

- 20.** Calcolare poli e residui di $f(z) = \frac{\sin z}{z(z - \pi)^3}$. Calcolare, se possibile, con il teorema dei residui l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ rispettivamente nei casi
- (a) γ la circonferenza di centro 3 e raggio 2 in senso antiorario
 - (b) γ la circonferenza di centro i e raggio 2 in senso orario
- 21.** Calcolare poli e residui di $f(z) = \frac{\sin z}{z(z - 1)^3}$. Calcolare, se possibile, con il teorema dei residui l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ rispettivamente nei casi
- (a) γ la circonferenza di centro 1 e raggio $1/2$ in senso antiorario
 - (b) γ la circonferenza di centro i e raggio 1 in senso orario
- 22.** Calcolare $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^3 - i)^2} dz$, nei due casi in cui γ sia rispettivamente
- (a) una parametrizzazione della frontiera di $\{z \in \mathbb{C} : 2|z| < 1\}$ in senso antiorario;
 - (b) una parametrizzazione della frontiera di $\{z \in \mathbb{C} : 1 - |\operatorname{Re} z|^2 > \frac{3}{4}|\operatorname{Im} z|\}$ in senso antiorario.
- 23.** Calcolare $\int_{\gamma} \frac{\cos(i\pi z)e^{i\pi z}}{(z - 1)^2} dz$, dove γ è una parametrizzazione in senso antiorario di $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = \beta\}$, nei due casi: (a) $\beta = 1$; (b) $\beta = 5$.
- 24.** Calcolare $\int_{\gamma} \frac{\sin(i\pi z)}{(z^2 + 4)^2} dz$, dove
- (a) γ è la circonferenza di centro i e raggio $1/2$;
 - (b) γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 3.